擬単調写像に関する変分不等式問題の飯塚-高橋型近似列のもつ性質

Properties of Iiduka-Takahashi type iterations of variational inequality problems for pseudomonotone mappings

豊田昌史

Masashi Toyoda

玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
College of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

In this paper, we introduce an iteration for finding an element of the set of solutions of the variational inequality for a psuedomonotone mapping in a Hilbert space. Moreover, we consider strong convergence of the iteration to the solution of variational inequality problem.

Keywords: Variational inequality, pseudomonotone mapping, strong convergence.

第 1 節　はじめに

H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする. A を C から H への写像とする. $x^* \in C$ が変分不等式問題の解であるとは, 任意の $x \in C$ に対して

$$\langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0$$

をみたすときをいう. 変分不等式問題の解全体の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ とあらわす. ある $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

をみたすとき, 写像 A を逆強単調 (inverse-strongly monotone) という. A が逆強単調写像の場合, 変分不等式問題の解に強収束する結果が既に得られている. 実際, 2004 年, 飯塚-高橋 [4] は $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

で定める近似列 (以降, 飯塚-高橋型近似列と呼ぶ) を導入し, 変分不等式問題の解に強収束することを示した. ここで $\{\alpha_n\}$ は $(0, 1)$ の数列で

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

および

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

をみたすものとする. $\{\lambda_n\}$ は $(0, 1)$ の部分区間 $[a, b]$ の数列で

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

をみたすものとする. P_C は H から C の上への距離射影である. [8, 9] も参照されたい. さらに, 2011 年, 青山 [1] は, $\{\alpha_n\}$ と $\{\lambda_n\}$ の条件を

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

および

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < 2\alpha$$

に弱めたとしても, 飯塚-高橋型近似列が, 変分不等式問題の解に強収束することを示した. ここで α は逆強単調写像 A の係数である. これ

らの研究が示すように, A を逆強単調写像とするとき, 飯塚-高橋型近似列は $\{\alpha_n\}$, $\{\lambda_n\}$ に対して十分な仮定をすれば, 変分不等式問題の解に強収束することが知られている.

一方, 写像 A が有界で, さらに x に弱収束する点列 $\{x_n\}$ が

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n - x\rangle \le 0$$

をみたすならば, 任意の $y \in C$ に対して

$$\langle Ax, x-y\rangle \le \liminf_{n\to\infty}\langle Ax, x_n - y\rangle$$

が成り立つとき, 写像 A を擬単調 (psuedomonotone) という. A が擬単調写像の場合の変分不等式問題は, 例えば, [3, 5, 6, 2] で扱われている. A が擬単調写像の場合, 変分不等式問題の解に弱収束する結果は得られているものの ([3, 6]), 筆者の知る限り, いまだ強収束する結果を得られていない. A が擬単調写像の場合でも, 変分不等式問題の解に強収束する近似列は構成できるであろうか.

逆強単調写像に場合では強収束を得られている飯塚-高橋型近似列を利用すれば, 擬単調写像の場合の変分不等式問題の解への強収束定理を得られるかもしれない. そこで本論文において, A が擬単調写像の場合, 飯塚-高橋型近似列がどのような性質をもつのかを考察する. また, 強い仮定ではあるが, 飯塚-高橋型近似列が強収束するための十分条件を示す.

第 2 節　準備

H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする. 任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x-y\| \mid y \in C\}$$

となるような $z \in C$ が一意に存在する. $P_C x = z$ で表し, P_C を C から H への上への距離射影という. 距離射影 P_C に対して, $z = P_C x$ であるための必要十分条件は

$$\langle x - z, z - y\rangle \ge 0$$

が任意の $y \in C$ に対して成り立つことである. 詳しくは [7] を参照されたい.

A を C から H への写像とする. 写像 A がコアシブ (coercive) であるとは, 任意の $x \in C$ に対して

$$\langle Ax, x\rangle \ge \|x\|^2$$

が成り立つときをいう. 写像 A が擬単調 (psuedomonotone) であるとは, A が次の (I)(II) をみたすときをいう.

(I) A は有界である.

(II) x に弱収束する点列 $\{x_n\}$ が

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n - x\rangle \le 0$$

をみたすとき, 任意の $y \in C$ に対して

$$\langle Ax, x-y\rangle \le \liminf_{n\to\infty}\langle Ax, x_n - y\rangle$$

が成り立つ.

写像 A がポテンシャル (potential) であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\int_0^1 \left(\langle A(t(x+y)), x+y\rangle - \langle A(tx), x\rangle\right) dt = \int_0^1 \langle A(x+ty), y\rangle dt$$

をみたすときをいう. 写像 A がリプシッツ連続 (Lipschitz continuous) であるとは, ある $L > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Ax - Ay\| \le L\|x - y\|$$

が成り立つときをいう.

C の点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する. $x \in C$ とする. $x_1 = x$ とする. $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

とする. ここで $\{\alpha_n\}$ は $(0,1)$ の数列である. また $\{\lambda_n\}$ は $(0,1)$ の部分区間 $[a,b]$ の数列である. 以下, 各 n に対して

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

とおく.

補助命題 1. 写像 A は擬単調とする. 点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は有界であるとし

$$x_n - y_n \to 0$$

とする. このとき, 点列 $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ の弱収束先 x^* は変分不等式問題の解である. すなわち $x^* \in \mathrm{VI}(C, A)$ である.

証明. まず, 任意の $y \in C$ に対して

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n - y\rangle \le 0$$

および

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n - y\rangle \le 0$$

が成り立つことを示す.

$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$ より, 任意の $y \in C$ に対して

$$\langle y_n - (x_n - \lambda_n Ax_n), y - y_n\rangle \ge 0$$

である. したがって

$$\langle y_n - x_n, x_n - y_n\rangle \ge \langle -\lambda_n Ax_n, y - y_n\rangle,$$

すなわち

$$-\frac{1}{\lambda_n}\|x_n - y_n\|\|v - y_n\| \ge \langle Ax_n, y_n - y\rangle$$

を得る. $y \in C$ とする. このとき

$$\begin{aligned}
&\langle Ax_n, x_n - y\rangle \\
&= \langle Ax_n, x_n - y_n\rangle + \langle Ax_n, y_n - y\rangle \\
&\le \langle Ax_n, x_n - y_n\rangle + \frac{1}{\lambda_n}\|y_n - x_n\|\|y - y_n\| \\
&\le \|Ax_n\|\|x_n - y_n\| + \frac{1}{a}\|x_n - y_n\|\|y - y_n\|
\end{aligned}$$

である. ここで $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$ であることに注意されたい. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は有界, 写像 A は有界で, $x_n - y_n \to 0$ であるから

$$\liminf_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n - y\rangle \le 0$$

および

$$\limsup_{n\to\infty}\langle Ax_n, x_n - y\rangle \le 0$$

を得る.

上記の y の代わりに x^* で考えれば同様に不等式

$$\begin{aligned}
&\langle Ax_{n_i}, x_{n_i} - x^*\rangle \\
&\le \|Ax_{n_i}\|\|x_{n_i} - y_{n_i}\| + \frac{1}{a}\|x_{n_i} - y_{n_i}\|\|x^* - y_{n_i}\|
\end{aligned}$$

を得る. よって

$$\limsup_{i\to\infty}\langle Ax_{n_i}, x_{n_i} - x^*\rangle \le 0$$

が成り立つ. $y \in C$ とする. A は擬単調であるから

$$\langle Ax^*, x^* - v\rangle \le \liminf_{i\to\infty}\langle Ax_{n_i}, x_{n_i} - y\rangle$$

である. これより

$$\begin{aligned}
\langle Ax^*, x^* - y\rangle &\le \liminf_{i\to\infty}\langle Ax_{n_i}, x_{n_i} - y\rangle \\
&\le 0
\end{aligned}$$

を得る. すなわち

$$\langle Ax^*, y - x^*\rangle \ge 0$$

である. □

命題 2. H を *Hilbert* 空間とし, C を H の閉凸集合とする. A を C から H への擬単調写像とする. C の点列 $\{x_n\}$ を次のように定義する. $x \in C$ とする. $x_1 = x$ とする. $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

とする. ここで $\{\alpha_n\}$ は $(0, 1)$ の数列である. また $\{\lambda_n\}$ は $(0, 1)$ の部分区間 $[a, b]$ の数列である. $y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$ とおく. $x^* = P_{\mathrm{VI}(C,A)}x$ とおく. 点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は有界であるとし, $x_n - y_n \to 0$ とし, さらに $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\|y_n - x^*\| \le \|x_n - x^*\|$$

をみたすとする. また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$$

をみたすとする. このとき $\{x_n\}$ は x^* に強収束する.

証明. まず

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x - x^*, x_n - x^*\rangle \le 0$$

が成り立つことを示す. $\{x_n\}$ は有界であるから, 部分列 $\{x_{n_i}\}$ が存在して x^* に弱収束する.

補助命題 1 より $x^* \in \mathrm{VI}(C, A)$ である．したがって

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle x - x^*, x_n - x^*\rangle \\ &\quad = \lim_{i\to\infty}\langle x - x^*, x_{n_i} - x^*\rangle \\ &\quad = \langle x - x^*, x^* - x^*\rangle \leq 0\end{aligned}$$

を得る．

$\epsilon > 0$ とする．$\limsup_{n\to\infty}\langle x - x^*, x_n - x^*\rangle \leq 0$ より, ある自然数 n_0 が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して

$$\langle x - x^*, x_n - x^*\rangle < \epsilon$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}&\alpha_n x + (1-\alpha_n)y_n - (\alpha_n x + (1-\alpha_n)x^*) \\ &\quad = x_{n+1} - x^* + \alpha_n(x^* - x)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\|\alpha_n x + (1-\alpha_n)y_n - (\alpha_n x + (1-\alpha_n)x^*)\|^2 \\ &\geq \|x_{n+1} - x^*\|^2 + 2\alpha_n\langle x^* - x, x_{n+1} - x^*\rangle\end{aligned}$$

を得る．よって $n \geq n_0$ に対して

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\leq 2\alpha_n\langle x - x^*, x_{n+1} - x^*\rangle \\ &\qquad + (1-\alpha_n)^2\|y_n - x^*\|^2 \\ &\leq 2\alpha_n\langle x - x^*, x_{n+1} - x^*\rangle \\ &\qquad + (1-\alpha_n)^2\|x_n - x^*\|^2 \\ &\leq 2\alpha_n\epsilon + (1-\alpha_n)\|x_n - x^*\|^2 \\ &= 2\epsilon\,(1 - (1-\alpha_n)) \\ &\qquad + (1-\alpha_n)\|x_n - x^*\|^2\end{aligned}$$

である．したがって

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\leq 2\epsilon\left(1 - \prod_{k=n_0}^{n}(1-\alpha_k)\right) \\ &\qquad + \prod_{k=n_0}^{n}(1-\alpha_k)\|x_{n_0} - x^*\|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．これより

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq 2\epsilon$$

である．ϵ は任意の正数であるから

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq 0$$

である．したがって $x_n \to x^*$ を得る．□

第 3 節　おわりに

命題 2 では, $\{x_n\}$ が変分不等式問題の解 x^* に強収束するために, 点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は有界であるとし, $x_n - y_n \to 0$ とし

$$\|y_n - x^*\| \leq \|x_n - x^*\|$$

をみたすと仮定した．今後の課題は, これらの仮定をみたす $\{\alpha_n\}$, $\{\lambda_n\}$ の条件を見極めることである．まだ, 解決できていないが, ここでは [3, 6] を参考に, 考察を進めておく．

補助命題 3. 写像 A はポテンシャルとし, リプシッツ連続とする．A を用いた写像 Φ を, $x \in C$ に対して

$$\Phi(x) = \int_0^1 \langle A(tx), x\rangle dt$$

で定める．このとき, 任意の $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\Phi(y_n) + \left(\frac{1}{b} - \frac{L}{2}\right)\|x_n - y_n\|^2 \leq \Phi(x_n)$$

が成り立つ．

証明. $y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$ より

$$\langle y_n - (x_n - \lambda_n A x_n), x_n - y_n\rangle \geq 0$$

である．よって

$$\langle y_n - x_n, x_n - y_n\rangle \geq \langle -\lambda_n A x_n, x_n - y_n\rangle$$

である．さらに

$$-\frac{1}{\lambda_n}\|x_n - y_n\|^2 \geq \langle -A x_n, x_n - y_n\rangle$$

である．A はリプシッツ連続であるから

$$\begin{aligned}&|\langle A(x_n + t(y_n - x_n)) - A x_n, y_{-}x_n\rangle| \\ &\leq \|A(x_n + t(y_n - x_n)) - A x_n\|\|y_n - x_n\| \\ &\leq Lt\|y_n - x_n\|^2\end{aligned}$$

である．したがって, A はポテンシャルであるから

$$\begin{aligned}
&\Phi(y_n) - \Phi(x_n) \\
&\int_0^1 \langle A(ty_n), y_n\rangle dt - \int_0^1 \langle A(tx_n), x_n\rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle A(x_n + t(y_n - x_n)), y_n - x_n\rangle dt \\
&= \int_0^1 A(x_n + t(y_n - x_n)) - Ax_n, y_n - x_n\rangle dt \\
&\quad + \langle Ax_n, y_n - x_n\rangle \\
&\leq \int_0^1 Lt\|y_n - x_n\|^2 dt - \frac{1}{\lambda_n}\|x_n - y_n\|^2 \\
&= \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{\lambda_n}\right)\|x_n - y_n\|^2 \\
&\leq \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{b}\right)\|x_n - y_n\|^2
\end{aligned}$$

である．よって

$$\Phi(y_n) + \left(\frac{1}{b} - \frac{L}{2}\right)\|x_n - y_n\|^2 \leq \Phi(x_n)$$

を得る．□

補助命題 3 に, さらに $\{\Phi(x_n)\}$, $\{\Phi(y_n)\}$ の極限値が存在して, 一致すると仮定する．このとき

$$\Phi(y_n) + \left(\frac{1}{b} - \frac{L}{2}\right)\|x_n - y_n\|^2 \leq \Phi(x_n)$$

より

$$x_n - y_n \to 0$$

である． しかも A がコアシブとし, $\Phi(x) \geq \Phi(x_n)$, $\Phi(x) \geq \Phi(y_n)$ が成り立つと仮定する．このとき, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は有界である．実際

$$\begin{aligned}
&\Phi(x) \\
&\geq \Phi(x_n) \\
&= \int_0^1 \langle A(tx_n), tx_n\rangle \frac{1}{t} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{1}{t}\|tx_n\|^2 dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t}\|x_n\|^2 dt = \frac{1}{2}\|x_n\|^2
\end{aligned}$$

より, $\{x_n\}$ は有界となる．同様に, $\{y_n\}$ も有界となる．

以上の考察から, A をコアシブ, ポテンシャルでリプシッツ連続な擬単調写像とするとき, 次の (I)(II) をみたす $\{\alpha_n\}$, $\{\lambda_n\}$ の十分条件は何か, というのが残された課題となる． (I) $\{\Phi(x_n)\}$, $\{\Phi(y_n)\}$ の極限値が存在して, 一致する．(II) $\Phi(x) \geq \Phi(x_n)$, $\Phi(x) \geq \Phi(y_n)$ が成り立つ．

参考文献

[1] K. Aoyama, *Approximations to solutions of the variational inequality problem for inverse-strongly-monotone mappings*, Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Busan, Korea, 2011), 1–9.

[2] I. B. Badriev and V. V. Banderov, *Iterative methods for solving variational inequalities of the theory of soft shells*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **35** (2014), 371–383.

[3] I. B. Badriev, O. A. Zadvornov and A. M. Saddek, *Convergence analysis of iterative methods for some variational inequalities with pseudomonotone operators*, Differential Equations **37** (2001), 934–942.

[4] H. Iiduka and W Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, Journal of Convex Analysis, **11** (2004), 69–79.

[5] S. Migórski, *Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications*, Journal of Global Optimization, **31** (2005), 505–533.

[6] A. M. Saddeek and S. A. Ahmed, *On the convergence of some iteration processes for J-pseudomonotone mixed variational inequalities in uniformly smooth Banach spaces*, Mathematical and Computer Modelling **46** (2007), 557–572.

[7] 高橋渉, 非線形関数解析学–不動点定理とその周辺, 近代科学社, 1988.

[8] 豊田昌史, ヒルベルト空間での極大単調作用素に関する収束定理, 京都大学数理解析研究所講究録, 1755 (2011), 46–52.

[9] 豊田昌史, 逆強単調写像に関する変分不等式問題を扱った Badriev と Zadvornov の結果の一考察, 玉川大学工学部紀要, 47 (2012), 81–87.

2015 年 3 月 13 日原稿受付
Received, March 13, 2015