

# 学生実験におけるフーリエ解析 II

Some studies on Fourier analysis in students experiment II

大崎正雄

Masao Osaki

玉川大学工学部ソフトウェアサイエンス学科, 194-8610 東京都町田市玉川学園 6-1-1  
College of Engineering, Tamagawa University,  
6-1-1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194-8610

## Abstract

In succession of the paper I wrote last year, here we give some troubles in teaching and their solutions occurred during the Software Science Experiment II course, which is opened for the 5th semester in the Department of Software Science. One of the subjects of the experiment course is understanding the fundamentals of PCM (Pulse Code Modulation). They deal with the sampling theorem and bandwidth of communications. Some students are still not familiar with Fourier analysis while the explanation of the sampling theorem is done at the frequency region. Typical mistakes and their settlements are given.

**Keywords:** Students experiment, Fourier analysis, Pulse Code Modulation, Sampling theorem.

## 1 はじめに

本学工学部ソフトウェアサイエンス学科では「ソフトウェアサイエンス実験 I (以下, 実験 I)」と「ソフトウェアサイエンス実験 II (以下, 実験 II)」を必修科目として実施してきた。それぞれ 4 セメスター, 5 セメスターで開講され, 実験による現象把握と, それをレポートに表す技術の修得を目指していた。各実験は 3 テーマで構成され, 実験 II では「PCM」と題してパルス符号変調の基礎知識を修得するテーマを著者は担当した。

本稿では, その実験において修得を目指した項目, その手法, そこで生じた問題とその解決方法について述べる。そこに見られる幾つかの工夫が実験に限らず, スペクトル解析に関連する講義においても役立てば幸いである。

## 2 数学的基礎

既に実験 I を履修しており (単位の取得は保証の限りではない), フーリエ解析について話を聞いたことはある学生が対象である。そのため, 基

礎からの説明は省略し, 実験内で用いるであろう以下の項目について演習問題として課した。

- 1) 周波数  $f_1$  の正弦波  $f(t) = A \cos 2\pi f_1 t$  を複素フーリエ級数展開し, 得られたスペクトルを図示せよ。
- 2) 周期  $T$  の<sup>くけい</sup>矩形波は式 (1) で表される。まず式 (1) の時間波形を実験ノートに描き, 続いて矩形波のフーリエ係数  $a_m, b_m$  を導出せよ。

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & T/2 > |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (1)$$

1) は標本化の定理における情報信号  $s(t)$  を想定している。この複素フーリエ係数導出において, オイラーの関係式と三角関数の直交性を用いる。すなわち以下の展開である。

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \exp[-2\pi i m f_1 t] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos 2\pi f_1 t \cdot \exp[-2\pi i m f_1 t] dt \\
&= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos 2\pi f_1 t \{ \cos[2\pi m f_1 t] \\
&\quad - i \sin[2\pi m f_1 t] \} dt \\
&= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2\pi f_1 t] \cos[2\pi m f_1 t] dt \\
&\quad - i \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2\pi f_1 t] \sin[2\pi m f_1 t] dt.
\end{aligned}$$

そして虚数部分（第二項）を考えると三角関数の直交性から全ての  $m$  についてゼロである。次に実数部分（第一項）を考えると  $m = \pm 1$  以外は三角関数の直交性からゼロになる。

$$\begin{aligned}
c_{\pm 1} &= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2\pi f_1 t] \cos[2\pi f_1 t] dt \\
&= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos[2 \cdot 2\pi f_1 t] + \cos[0]}{2} dt \\
&= \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[4\pi f_1 t] dt + \frac{A}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot dt \\
&= \frac{A}{2T} \left[ \frac{1}{4\pi f_1} \sin[4\pi f_1 t] \right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{A}{2T} [t]_{-T/2}^{T/2} \\
&= \frac{A}{2T} \cdot \frac{1}{4\pi f_1} \left\{ \sin \left[ 4\pi f_1 \frac{T}{2} \right] - \sin \left[ 4\pi f_1 \frac{-T}{2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{A}{2T} \left\{ \frac{T}{2} - \frac{-T}{2} \right\} \\
&= \frac{A}{8\pi T f_1} \{ \sin[2\pi T f_1] + \sin[2\pi T f_1] \} + \frac{A}{2T} \cdot T.
\end{aligned}$$

$f_1 = 1/T$  であること、 $\sin 2\pi = 0$  であることを用いると第一項はゼロとなり、最終的に以下の結果を得る。

$$c_{\pm 1} = \frac{A}{2}. \quad (2)$$

よって、複素フーリエ級数展開は次式となる。

$$f(t) = \frac{A}{2} \exp[2\pi i(-f_1)t] + \frac{A}{2} \exp[2\pi i f_1 t]. \quad (3)$$

これを図示すると図 1 に示すスペクトルを得る。

しかし、オイラーの関係式を覚えている学生は 3 割ほど、直交性は知っていても使いこなせる学生は 2 割ほどに減少する。その結果、ほとんど全ての過程を記述して見せる必要があった。知識の

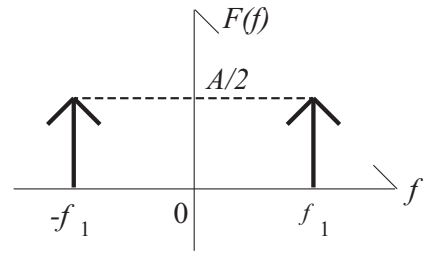


図 1:  $A \cos 2\pi f_1 t$  の周波数スペクトル

定着を図るには繰り返しが必要であると言われるが、現状よりも更に頻繁に三角関数などの計算を繰り返す必要があると考える。

次に 2) は PCM 信号が占有する帯域幅について理解するために必要な知識である。まずは実験 I と同様に式 (1) の絶対値を外すことが困難な学生が 4 割ほど居た。その説明に基づき作図し、図 2 を得る。そしてこの図 2 を元に積分区間を分割し、フーリエ係数を導出する。

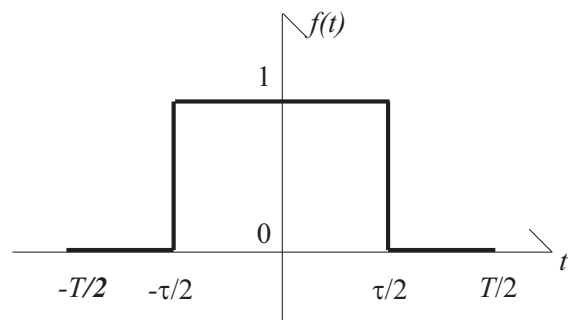


図 2: 矩形波の時間波形

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos[2\pi(m f_1)t] dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{-\tau/2} 0 \cdot \cos[2\pi(m f_1)t] dt \\
&\quad + \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot \cos[2\pi(m f_1)t] dt \\
&\quad + \frac{2}{T} \int_{\tau/2}^{T/2} 0 \cdot \cos[2\pi(m f_1)t] dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos[2\pi(m f_1)t] dt \\
&= \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{2\pi(m f_1)} \sin[2\pi(m f_1)t] \right]_{-\tau/2}^{\tau/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T \cdot 2\pi(mf_1)} \left\{ \sin \left[ 2\pi(mf_1) \frac{\tau}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \sin \left[ 2\pi(mf_1) \cdot -\frac{\tau}{2} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\pi m T f_1} \{ \sin [\pi m f_1 \tau] + \sin [\pi m f_1 \tau] \} \\
&= \frac{2 \sin [\pi m f_1 \tau]}{\pi m T f_1}.
\end{aligned}$$

$f_1 = 1/T$  の関係を用いると最終的に次式を得る.

$$a_m = \frac{2 \sin[\pi m(\tau/T)]}{\pi m}. \quad (4)$$

また,  $a_0 = 2\tau/T$  も定義にしたがって計算すれば得られる.

次に  $b_m$  を導出する.

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin[2\pi(mf_1)t] dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{-\tau/2} 0 \cdot \sin[2\pi(mf_1)t] dt \\
&\quad + \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot \sin[2\pi(mf_1)t] dt \\
&\quad + \frac{2}{T} \int_{\tau/2}^{T/2} 0 \cdot \sin[2\pi(mf_1)t] dt \\
&= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin[2\pi(mf_1)t] dt \\
&= 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

最後は  $\sin x$  が奇関数である性質を使った. 以上をまとめると次の結果を得る.

$$a_m = \frac{2 \sin[\pi m(\tau/T)]}{\pi m}, \quad b_m = 0. \quad (6)$$

実際の計算において  $b_m$  がゼロに成らない学生が3割ほど見られた. やはり  $\sin x$  と  $\cos x$  の積分の関係に馴染めていない学生が少なからず居る.

### 3 標本化の定理

標本化の定理を文章で書けば『周波数  $f_1$  [Hz] 以上の周波数成分を持たないように帯域制限された信号は,  $\frac{1}{2f_1}$  [s] よりも小さい間隔の等間隔標本値によって一意的に決定できる』である. すなわち送りたい情報信号  $s(t)$  の最高周波数が  $f_1$  [Hz] の場合, その2倍以上の標本化周波数  $f_s$  [Hz] で標本

化すれば情報信号  $s(t)$  は完全に再現できることになる.

以下ではアナログ信号をデジタル信号に変換する過程において存在する「標本化出力」と呼ばれる信号(図3)の時間波形と周波数スペクトルを解析し, 標本化の定理が意味するところを理解する.

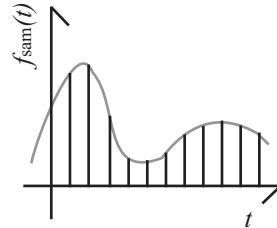


図3: 標本化出力  $f_{\text{sam}}(t)$  の例

#### 3.1 標本化出力の時間波形

準備としてインパルス信号  $\delta(t)$  を理解しておく. これは  $t=0$  で高さが無限大, 幅がゼロ, 面積が1の関数である. すなわち  $t=0$  以外で関数の値は0となる. このインパルス信号が周期  $T_s$  で繰り返す信号がインパルス列信号  $\delta_{T_s}(t)$  である.

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s). \quad (7)$$

#### 演習 I

このインパルス列信号  $\delta_{T_s}(t)$  を時間軸上で図示せよ.

この演習に関しては引っ掛かる学生は少なかった. 次の図4を得る.

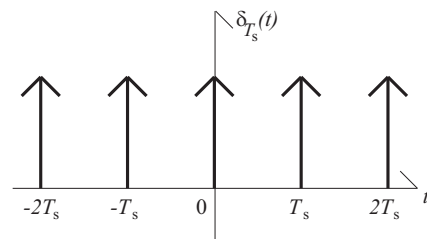


図4: インパルス列信号  $\delta_{T_s}(t)$

次に情報信号  $s(t)$  にインパルス列信号  $\delta_{T_s}(t)$  を掛け合わせて標本化出力  $f_{\text{sam}}(t)$  を得る.

$$f_{\text{sam}}(t) = s(t) \cdot \delta_{T_s}(t). \quad (8)$$

すなわち図3が得られることになる。

### 3.2 標本化出力の周波数スペクトル

続いてこの信号  $f_{\text{sam}}(t)$  のフーリエ変換を行い、周波数スペクトル  $F_{\text{sam}}(f)$  を導出する。情報信号  $s(t)$  のフーリエ変換を  $S(f)$  で表し、インパルス列信号  $\delta_{T_s}(t)$  のフーリエ変換が  $\frac{2\pi}{T_s} \cdot \delta_{f_s}(f)$  であることを用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} f_{\text{sam}}(t) \Rightarrow F_{\text{sam}}(f) &= \frac{1}{2\pi} \left[ S(f) * \frac{2\pi}{T_s} \delta_{f_s}(f) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} [S(f) * \delta_{f_s}(f)]. \quad (9) \end{aligned}$$

ここで記号「\*」は畳み込み積分を表しており、一般に関数  $F_1(f)$  と  $F_2(f)$  の畳み込み積分は次式で定義される。

$$F_1(f) * F_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(f - \xi) \cdot F_2(\xi) d\xi. \quad (10)$$

また、関数  $\delta_{f_s}(f)$  は次式で表される周波数軸上のインパルス列関数を意味する。

$$\delta_{f_s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s). \quad (11)$$

ここで  $f_s = \frac{1}{T_s}$  が成り立つ。

#### 演習 II

このインパルス列関数  $\delta_{f_s}(f)$  を周波数軸上で図示せよ。

この演習に関しては演習 I と同等だったためほとんどの学生が正解 (図5) を得られた。ただ、横軸が  $t$  の学生も 1 割程度居た。

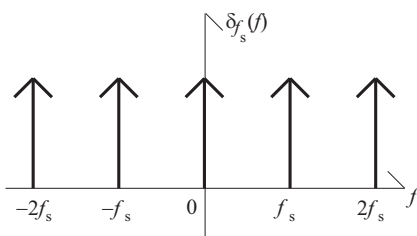


図 5: インパルス列関数  $\delta_{f_s}(f)$

#### 演習 III

情報信号が  $s(t) = A \cos 2\pi f_1 t$  であった場合、

$f_s > 2f_1$  を仮定して式 (9) に示す周波数スペクトル  $F_{\text{sam}}(f)$  を周波数軸上で図示せよ。ただし『信号が存在する周波数』のみに注目し、縦軸の値までは要求しない。

情報信号  $s(t)$  のスペクトル  $S(f)$  は既に 2 章において図 1 として得ている。そしてインパルス列関数  $\delta_{f_s}(f)$  も図 5 として得られている。よってこの演習では両者の畳み込み積分の実行するだけである。ただし  $S(f)$  を  $F_1(f - \xi)$  として表した場合に変数  $f$  から変数  $\xi$  に変わって、かつマイナスの符号が付いていること、そして外部パラメータとなった  $f$  が変化することによって何が起きているかを理解させる必要がある。よって以下のような解説を試みた。

- 1) 関数  $f(x) = ax + b$  を適当に描く ( $a, b > 0$  を仮定, 図 6)。

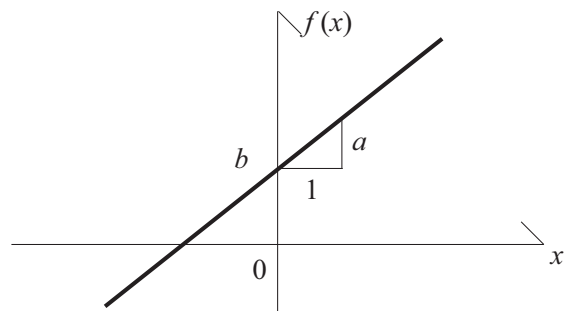


図 6:  $f(x) = ax + b$  のグラフ ( $a, b > 0$  を仮定)

- 2) 関数  $f(-x)$  を描く。  $a > 0$  を仮定しているの で  $x$  を増やすと  $f(-x)$  は減少していく。すなわち、 $y$  軸対称に左右を入れ替えたグラフとなる (図 7)。
- 3) そして関数  $f(c - x) = f\{-(-x - c)\}$  を描く ( $c > 0$  を仮定)。例えば  $f(c - x) = b$  となる条件は  $c - x = 0$ , すなわち  $x = c$  のときである。すなわちグラフは  $x$  軸, 正 (右) の方向に  $c$  だけ移動する (図 8)。
- 4) これにより関数  $f(x)$  を  $f(c - x)$  とした場合に、得られるグラフが「 $y$  軸対称に左右を入れ替え、 $c$  の分だけ右に移動する」ことを理解する。

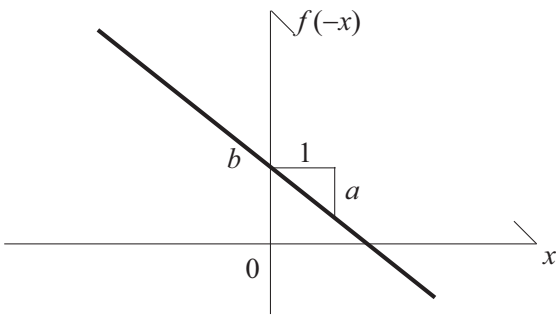


図 7:  $f(-x)$  のグラフ ( $a, b > 0$  を仮定)

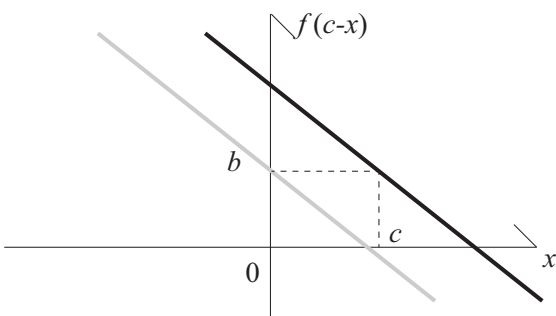


図 8:  $f(c-x)$  のグラフ ( $c > 0$  を仮定)

以上の解説をした後、情報信号のスペクトル  $S(f)$  を  $S(f-\xi)$  として  $\xi$  の関数として表す (図 9)。

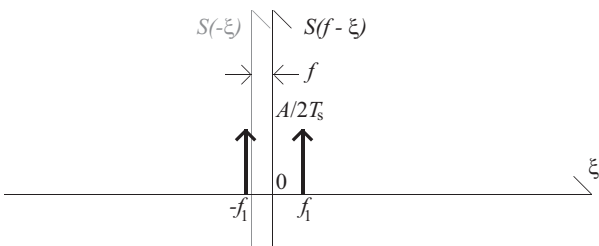


図 9:  $S(f-\xi)$  のグラフ

そしてインパルス列関数  $\delta_{f_s}(\xi)$  と上下に並べて描き、両者のインパルスが重なる  $f$  の場合にのみ  $F_{\text{sam}}(f)$  が値を持つことを示す (図 10)。

#### 演習 IV

上記の演習 III で図示した  $F_{\text{sam}}(f)$  において、周波数  $f_1$  を増加していくと各周波数スペクトルは左右のどちらに動くか考えよ。  $f_1$  の増加に伴い  $f_s = 2f_1$  を経て  $f_s < 2f_1$  となると周波数ス

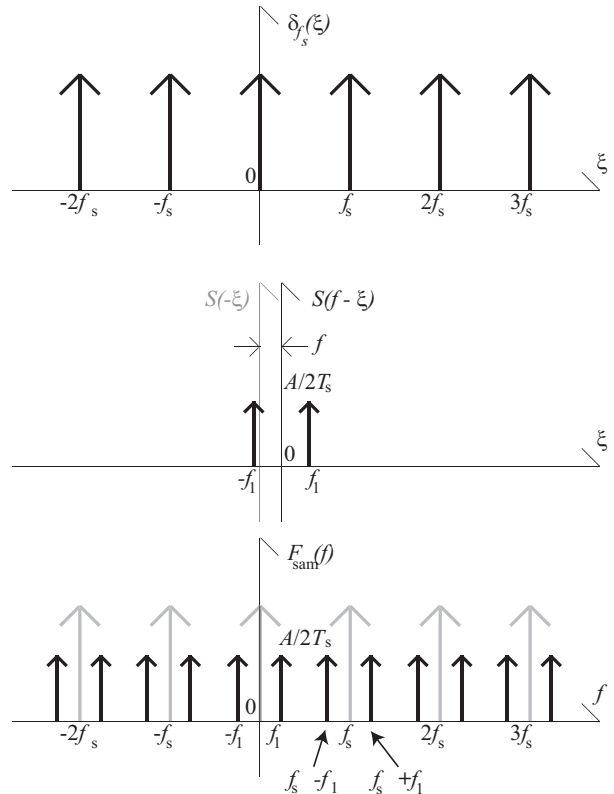


図 10:  $S(f-\xi)$ ,  $\delta_{f_s}(\xi)$ , そして  $F_{\text{sam}}(f)$  のグラフ

ペクトル  $F_{\text{sam}}(f)$  にはどのような現象が見られるか説明せよ。

結果はそれぞれ図 11, 12, 13 となる。すなわち図 11 においては  $f_1$  と  $f_s - f_1$  が  $f_s/2$  に向かって近づき、図 12 では  $f_s/2$  において両者が重なる。そして図 13, すなわち  $f_s < 2f_1$  の場合には  $f_1$  と  $f_s - f_1$  の位置が入れ替わり、 $f_1$  の周波数を標本化しても  $f_s - f_1$  の周波数が得られると予想される。実験ではオシロスコープの FFT 機能を用いてスペクトルの入れ替わりを確認した。更にスピーカーから聞こえる音も標本化周波数の半分である 4kHz まで上がって行った後、 $f_1$  の上昇にもかかわらず下がっていくことが確認できた。提出された実験レポートから学生の内容理解を推察すると、標本化の定理の必要性和、それが満足されない場合に起きる現象の理解は出来ていたと言える。

#### 4 PCM 信号の伝送帯域

アナログ変調方式である AM や FM において、その伝送帯域は情報信号の最高周波数を  $f_1$  で表した場合にそれぞれ  $BW_{\text{AM}} = 2f_1, BW_{\text{FM}} =$

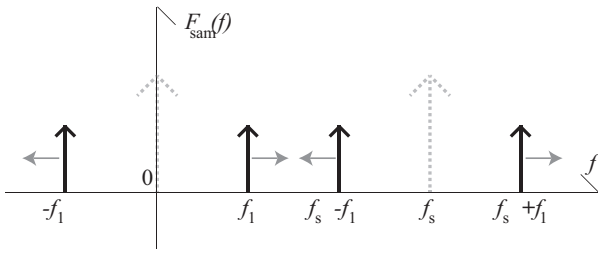


図 11:  $f_1$  を増加させた場合の  $F_{\text{sam}}(f)$ .

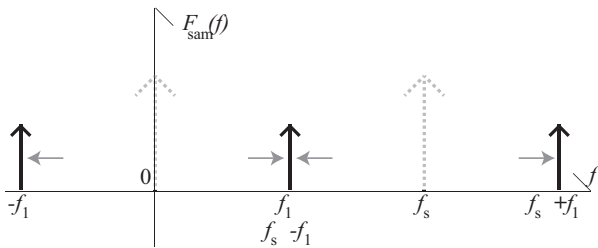


図 12:  $f_s = 2f_1$  場合の  $F_{\text{sam}}(f)$ .

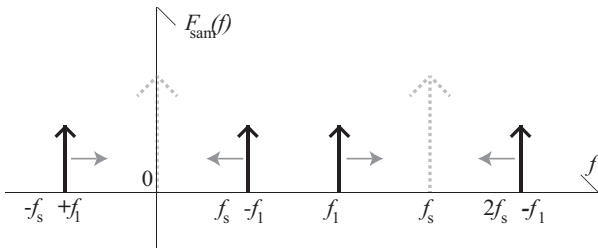


図 13:  $f_s < 2f_1$  場合の  $F_{\text{sam}}(f)$ .

$2(m_f + 1)f_1$  となることが知られている。ただし  $m_f$  は FM における変調指数を表す。すなわち、伝送帯域が情報信号の最大周波数で決定される。一方で周波数利用効率の点から言えば、伝送帯域は狭ければ狭いほど効率が良くなる。そこでデジタル通信の代表である PCM において必要とされる伝送帯域を導出し、アナログ通信のそれと比較することによって周波数利用効率を議論する。

以下では、まず PCM の伝送帯域を導出し、それに続いて各変調方式間の比較を行う。

#### 4.1 PCM 伝送帯域の導出

デジタル信号の符号周期として  $T$  を仮定すると、8bit 符号化の場合に単一パルスの幅  $\tau$  は  $\tau = T/8$  で表される。すなわち符号「00000001」の場合の

スペクトルは 2 章の式 (6) において  $\tau = T/8$  を代入すれば得られる。また、このときの基本周波数を  $f_0 = 1/T$  で表す。特に PCM においては符号周期は標本化周期に等しく、結果として標本化周波数と基本周波数は一致する ( $f_0 = f_s$ )。もちろん、以下に示すように符号自体に繰り返しが有る場合には符号周期は一定であっても基本周波数は変化し、標本化周波数との一致は失われる。すなわち、「00010001」の場合は  $T' = T/2$  となって基本周波数は  $f'_0 = 1/T' = 2f_0$  となる。そして  $\tau/T' = 1/4$  を得る。一方で「00000011」(4bit の「0001」に相当) の場合にも  $\tau' = T/4$  であるが基本周波数は  $f_0$  である。

#### 演習 VI

8bit 符号において、上記の符号を含め、それ以外に「00001111」と「01010101」のパワースペクトルを理論から求め、それぞれを図示せよ。

この問題に関しては  $\tau$  と  $T$  の組合せでフーリエ係数が変化し、かつ符号の周期性によって基本周波数も変化するため、本当に理解している学生は 1 割程度であった。

この実験の説明として、まずはフーリエ係数の分類を行う。上記の状況からフーリエ係数  $a_m$  を以下のように定義する。

- 00000001 :  $\tau/T = 1/8$  の場合

$$a_m = \frac{2 \sin(\pi m/8)}{\pi m} \quad (12)$$

- 00000011 :  $\tau' = 2\tau$  すなわち  $\tau'/T = 1/4$  の場合

$$a'_m = \frac{2 \sin(\pi m/4)}{\pi m} \quad (13)$$

これは  $T' = T/2$  すなわち  $\tau/T' = 1/4$  の場合 (00010001) も同様である。

- 00001111 :  $\tau'' = 4\tau$  すなわち  $\tau''/T = 1/2$  の場合

$$a''_m = \frac{2 \sin(\pi m/2)}{\pi m} \quad (14)$$

これは  $T'' = T/4$  すなわち  $\tau/T'' = 1/2$  の場合 (01010101)、さらに  $\tau' = 2\tau, T' = T/2$  の場合 (00110011) も同様である。

また4ビット伝送の場合、8ビット伝送の符号とは以下の関係が成り立つ。

$$(0001)_4 \leftrightarrow (00000011)_8 \quad (15)$$

$$(0011)_4 \leftrightarrow (00001111)_8 \quad (16)$$

$$(0101)_4 \leftrightarrow (00110011)_8 \quad (17)$$

以上の議論に基づき具体的にフーリエ係数を求めると表1を得る。

表 1: 各条件下でのフーリエ係数

$m$	0	1	2	3
$a_m$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2 \sin[\pi/8]}{\pi}$	$\frac{2 \sin[\pi/4]}{2\pi}$	$\frac{2 \sin[3\pi/8]}{3\pi}$
$a'_m$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2 \sin[\pi/4]}{\pi}$	$\frac{2 \sin[\pi/2]}{2\pi}$	$\frac{2 \sin[3\pi/4]}{3\pi}$
$a''_m$	1	$\frac{2 \sin[\pi/2]}{\pi}$	0	$\frac{2 \sin[3\pi/2]}{3\pi}$

4	5	6	7
$\frac{2 \sin[\pi/2]}{4\pi}$	$\frac{2 \sin[5\pi/8]}{5\pi}$	$\frac{2 \sin[3\pi/4]}{6\pi}$	$\frac{2 \sin[7\pi/8]}{7\pi}$
0	$\frac{2 \sin[5\pi/4]}{5\pi}$	$\frac{2 \sin[3\pi/2]}{6\pi}$	$\frac{2 \sin[7\pi/4]}{7\pi}$
0	$\frac{2 \sin[5\pi/2]}{5\pi}$	0	$\frac{2 \sin[7\pi/2]}{7\pi}$

8	9	...
0	$\frac{2 \sin[9\pi/8]}{9\pi}$	...
0	$\frac{2 \sin[9\pi/4]}{9\pi}$	...
0	$\frac{2 \sin[9\pi/2]}{9\pi}$	...

ただし、厳密には式(6)で得られたフーリエ係数は時間波形を偶関数として扱っており、上記の符号列が偶関数である保証はない。しかしパワースペクトルのみに注目すれば、結果は一致するため詳細の説明を省略し、オシロスコープのFFT機能で観測される結果との一致のみに注目して実験を進めた。

次に基本周波数  $f_0$  を考える。PCM 実験装置において標本化周波数は  $f_s = 8[\text{kHz}]$  で固定である。よって符号に繰り返しが無い場合は基本周波数  $f_0 = 8[\text{kHz}]$  である。表1のフーリエ係数を組み合わせると(00000001), (00000011), (00001111)の周波数スペクトルを図14から図16に示す。

次に2回の繰り返しが有る場合は  $f'_0 = 16[\text{kHz}]$  となり、表1と合わせて(00010001), (00110011)の周波数スペクトルとして図17と図18を得る。

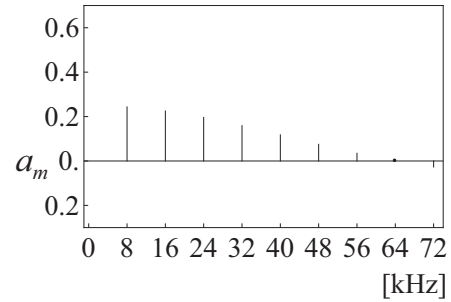


図 14: (00000001) の周波数スペクトル

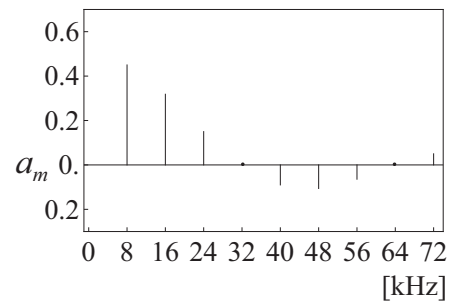


図 15: (00000011) の周波数スペクトル

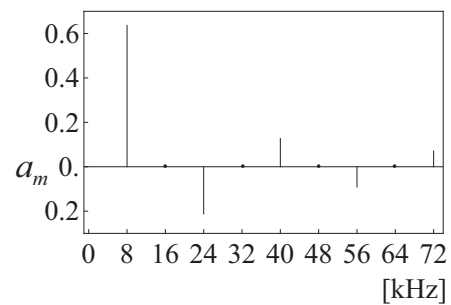


図 16: (00001111) の周波数スペクトル

そして4回の繰り返しが有る場合は  $f''_0 = 32[\text{kHz}]$  となり、(01010101)の周波数スペクトルは図19として得られる。

これより「00000001」の場合、 $m = 8$ で初めて  $a_m = 0$ となる。すなわち伝送帯域は64kHzである。次に「00000011」の場合は  $m = 4$ で初めて  $a'_m = 0$ となり、32kHzの帯域が必要となる。さらに「00001111」の場合は  $m = 2$ で初めて  $a''_m = 0$ となり、16kHzの帯域が必要となる。逆に8ビット中に2回繰り返す符号においては、「00010001」の場合に64kHz、「00110011」の場合には32kHzの帯域が必要である。そして8ビット中に4回繰り返す符号、すなわち「01010101」の場合はやはり64kHzの伝送帯域が必要と言える。

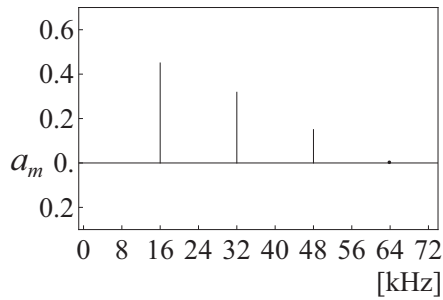


図 17: (00010001) の周波数スペクトル

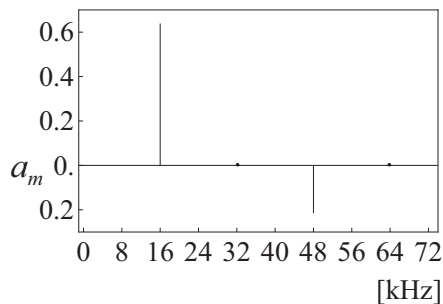


図 18: (001110011) の周波数スペクトル

ただし上記の帯域は片側帯域だけを考慮しており、このデジタル信号を用いて振幅偏移変調 (ASK) を行なった場合、その帯域幅は 2 倍になる。

実際の実験においてオシロスコプの FFT 機能によりパワースペクトルを測定した。準備した符号に応じて理論どおりの周波数にスペクトルが立つことを確認したが、FFT のスケールの調整に手間取る学生が 3 割程度居た。そして理論と実験の結果から、同じ標本化周波数であっても量子化ビット数が少ないと伝送帯域が狭くなり、逆に最小パルス幅が同じであれば符号の繰り返し回数が変化しても必要な伝送帯域は変化しないという事が 1 割程度の学生に理解されたと思う。

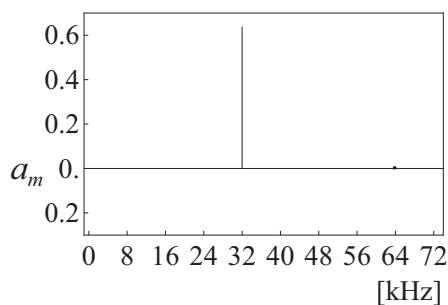


図 19: (01010101) の周波数スペクトル

## 4.2 アナログ変調との伝送帯域の比較

先に示したように、情報信号の最高周波数を  $f_1$  で表した場合に振幅変調 (AM) と周波数変調 (FM) それぞれの伝送帯域は  $BW_{AM} = 2f_1, BW_{FM} = 2(m_f + 1)f_1$  となる。一方でパルス符号変調 (PCM) においては、標本化の定理より標本化周波数  $f_s = 2f_1$  を要請され、 $n$  ビット量子化を行った場合には  $BW_{PCM} = 2 \cdot 2f_1 \cdot n$  となる。電話レベルの音質である  $n = 8$  の場合においても AM の 16 倍、FM の 4 倍 ( $m_f = 4$  とした) の伝送帯域が必要となる。すなわち、デジタル変調である PCM を用いる方が伝送帯域は広くなることが判る。

しかしながらデジタルデータは雑音に強く、更に圧縮技術や、多値変調の利用により伝送帯域を狭くすることができる。その結果、実用化されているデジタル通信はアナログ通信よりも周波数利用効率の高いシステムと成っている。

## 5 まとめ

ソフトウェアサイエンス実験 II で行ってきた PCM 実験における修得目標として「標本化の定理」と「伝送帯域」を取り上げた。そこではフーリエ解析を用いて現象を理論的に予測し、実際に測定、観察することで理論の裏付けを取り現象理解を進めた。そして各項目で生じる問題点とそれに対する解決策について具体的に示した。これらの内容が将来の学生実験、もしくはフーリエ解析の講義に役立つと幸いである。

## 参考文献

- [1] 土山牧夫, 宗像勉, 山崎浩一, 小川晃, 大崎正雄, ソフトウェアサイエンス実験 I I 指導書, 第 1 版, 2009 年 9 月 11 日
- [2] 土山牧夫, 宗像勉, 山崎浩一, 小川晃, 大崎正雄, ソフトウェアサイエンス実験 I I 指導書, 2015 年版, 2015 年 4 月 3 日

2017年3月6日原稿受付, 2017年4月13日採録決定

Received, March 6, 2017, accepted, April 13, 2017