学生実験におけるフーリエ解析

Some studies on Fourier analysis in students experiment

大崎正雄

Masao Osaki

玉川大学工学部ソフトウェアサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
College of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

Here we give some troubles in teaching and their solutions occured during the Software Science Experiment course, which is opened for the 4th semester in the Department of Software Science. One of the subjects of this experiment course is Fourier analysis using MyPC. Some students are not familiar with calculating the integration of sinusoidal function, and also some need support for drawing graphs with MS Excel. Typical mistakes and their settlements are given.

Keywords: Students expreriment, Fourier analysis, troubles and their solutions.

1 はじめに

本学工学部ソフトウェアサイエンス学科では「ソフトウェアサイエンス実験 I（以下，実験 I）」と「ソフトウェアサイエンス実験 II（以下，実験 II）」を必修科目として実施してきた．それぞれ 4 セメスター，5 セメスターで開講され，実験による現象把握と，それをレポートに表す技術の修得を目指していた．各実験は 3 テーマで構成され，実験 I では「パソコンによる信号解析」と題してフーリエ解析の初歩を修得するものを著者は担当した．

本稿では，その実験において修得を目指した項目，その手法，そこで生じた問題とその解決方法について述べる．そこに見られる幾つかの工夫が実験に限らず，フーリエ解析に関連する講義においても役立てば幸いである．

2 数学的基礎

フーリエ解析の第一歩は周期信号のフーリエ級数展開である．そのためには「周期信号の定義」とその代表例としての「正弦波信号の性質」が必要不可欠である．そのため，以下のように記した．

周期信号

信号 $f(t)$ が周期 T[sec.] を持つ場合，任意の時刻 t に対して以下の関係が成り立つ．

$$f(t) = f(t+T). \tag{1}$$

当然，m を整数として次の関係も成り立つ．

$$f(t) = f(t+mT). \tag{2}$$

ここで最も短い周期 T を**基本周期**と呼ぶ．

正弦波信号

一般に正弦波信号は振幅 A，周波数 f，初期位相 θ を用いて次式で表される．

$$f(t) = A\sin[2\pi ft + \theta]. \tag{3}$$

ここで明らかに周期 $T = 1/f$ が成り立つ．

さらにフーリエ級数展開は「三角関数の直交性」を根拠とし，周期信号の時間波形を基本周波数とその高調波成分からなる周波数スペクトルに分解する．そのため「ベクトルの内積がゼロになると

直交する」という概念や，具体的な「三角関数の積分」の技術が必要になる．しかし代数学は「そう言うものだ」と覚えていても，解析学（特に三角関数の積分）は覚えていないか，そもそも習ったことが無い学生も残念ながら本学科には存在する．そのため実験Iでは不定積分の公式が利用できるようになることを目的とした．

具体的な内容としては $\sin 2\pi ft$ と $\sin 2\pi(2f)t$ の一周期にわたる積分を見せ，その過程の理解を促すことで直交性の例とした．それに続いて学生自身が $\cos 2\pi ft$ と $\cos 2\pi(2f)t$，$\sin 2\pi ft$ と $\cos 2\pi ft$ の直交性を確認することを演習Iとして課した．

直交性

正弦波信号は異なる周波数成分を含まない．同じ周期 T[sec.] の正弦波信号として $\sin[2\pi ft]$（$f = 1/T$）と $\sin[2\pi(2f)t]$（基本周期は $T/2$）を考える．このとき両者の積を一周期にわたり積分すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T/2}^{T/2} \sin[2\pi ft] \times \sin[2\pi(2f)t]\mathrm{d}t \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2}\left(\cos[(2\pi ft) - \{2\pi(2f)t\}]\right. \\
&\qquad \left. - \cos[(2\pi ft) + \{2\pi(2f)t\}]\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \left(\cos[-2\pi ft] - \cos[3 \cdot 2\pi ft]\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2\pi f}\sin[-2\pi ft] - \frac{1}{6\pi f}\sin[6\pi ft]\right]_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{-1}{4\pi f}\left(\sin\left[-2\pi f\frac{T}{2}\right] - \sin\left[-2\pi f\frac{-T}{2}\right]\right) \\
&\quad -\frac{1}{12\pi f}\left(\sin\left[6\pi f\frac{T}{2}\right] - \sin\left[6\pi f\frac{-T}{2}\right]\right) \\
&= 0. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ただし $f \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$，$\sin[\pm\pi] = \sin[\pm 3\pi] = 0$ を用いた．式 (4) より，$\sin[2\pi ft]$ と $\sin[2\pi(2f)t]$ は相手の成分を含まないことが判る．この性質を「互いに直交する」と呼ぶ．

演習I

各自で $\cos[2\pi ft]$ と $\cos[2\pi(2f)t]$，$\cos[2\pi ft]$ と $\sin[2\pi ft]$ の場合について互いに直交することを確かめよ（必要であれば付録を参照）．

ここで問題となったのは「三角関数の積・和」の公式が第一歩であり，覚えていなくても加法定理から導出できることを伝えたがスマホで公式を調べる学生が1／3程度居た．更に $\sin x, \cos x$ の奇関数，偶関数についての知識も事前に知っている学生は少数であり，それを用いた簡略化は省いた．そして $\sin[\pm n\pi] = 0$ (n は整数) を覚えている学生も少なかった．よってこれらの内容を付録に載せることとした．

付録（一部）

三角関数の基本公式

$$
\begin{aligned}
\sin[-\theta] &= -\sin\theta, \\
\cos[-\theta] &= \cos\theta.
\end{aligned}
$$

積　→　和・差

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin[\alpha+\beta] + \sin[\alpha-\beta]\right\}, \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left\{\sin[\alpha+\beta] - \sin[\alpha-\beta]\right\}, \\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left\{\cos[\alpha+\beta] - \cos[\alpha-\beta]\right\}, \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left\{\cos[\alpha+\beta] + \cos[\alpha-\beta]\right\}.
\end{aligned}
$$

特別な一般角の値（n, ℓ は整数）

$$
\begin{aligned}
\sin[n\pi] &= 0, \\
\cos[n\pi] &= (-1)^n.
\end{aligned}
$$

不定積分公式

$$
\begin{aligned}
&\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1}, \quad (a \neq -1), \\
&\int a\mathrm{d}x = ax, \\
&\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}, \\
&\int \sin[ax]\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos[ax], \\
&\int \cos[ax]\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin[ax],
\end{aligned}
$$

定積分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

もう一点，演習Iの解答が「積分結果がゼロになった」ところで止めてしまう学生が半数近くいた．この課題の目的は直交性を示すことであり，最後に「よって***と***は直交する.」との一文を書くように指導を行った．

3 フーリエ級数展開

直交性の確認によってフーリエ係数，フーリエ級数展開の説明が可能となった．実験書には以下の内容を記した．

フーリエ係数

周期 T の周期信号 $f(t)$ は様々な周波数成分を持っている．しかし周波数 $f(=1/T)$[Hz] の成分は $\cos[2\pi ft]$ を $f(t)$ に掛けて積分して得られた量 a_1 と，$\sin[2\pi ft]$ を $f(t)$ に掛けて積分して得られた量 b_1 のみである．同様に周波数 mf[Hz]（m は整数）の成分についても a_m, b_m として得られる．

$$a_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\cos[2\pi(mf)t]\mathrm{d}t, \quad (5)$$
$$b_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot\sin[2\pi(mf)t]\mathrm{d}t. \quad (6)$$

ただし，積分の前の係数 $2/T$ は正規化のため．この a_m, b_m を「フーリエ係数」と呼び，周期信号 $f(t)$ に含まれる $\cos[2\pi mft]$ と $\sin[2\pi mft]$ の振幅を表している．

フーリエ級数展開

フーリエ係数が求められれば周期信号 $f(t)$ は以下のように表現できる．

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos[2\pi(mf)t] + b_m\sin[2\pi(mf)t]). \quad (7)$$

上式において m は無限大まで足し合わせる必要があるが，有限の m で打ち切っても $f(t)$ に近い波形が得られる．

そして実際にフーリエ係数を求める演習として以下の演習IIを学生に課した．

演習II

周期 T (必要であれば $T = 10^{-3}$[sec.]) の矩形（くけい）波，三角波の時間波形はそれぞれ式 (8), (9) で表される．まず各時間波形を実験ノートに描き，それに続いてそれぞれのフーリエ係数 a_m, b_m を $m = 10$ まで計算する（必要であれば付録を参照）.

- 矩形波

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T/4, \\ -1 & T/2 > |t| > T/4. \end{cases} \quad (8)$$

- 三角波

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4}{T}t + 1 & -T/2 \le t \le 0, \\ -\frac{4}{T}t + 1 & 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (9)$$

演習IIの解法において，積分区間の分割をイメージし易くするために時間波形をノートに書かせることにした．しかし，ここで問題になったのは絶対値の外し方を忘れている学生が8割ほど居たことである．すなわち，「絶対値の中身が正であればそのまま外し，負であればマイナスを付けて外す」ということが実行できない学生が多かった．また「矩形波」が読めない学生も多数いたためルビを打つこととした．

矩形波のフーリエ係数導出は公式を見ながらやれば大部分の学生が実行できた．しかし三角波の場合は部分積分の技術（？）が必要であり，一般論としての公式は付録に載せてある．

付録（一部）

部分積分

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$
$$= [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

しかし，それを用いて具体的に積分を実施できる学生は２割程度であった．実際の計算は，式 (9) より以下の手順である．

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(\frac{4}{T}t+1\right)\cos[2\pi(mf)t]\mathrm{d}x \quad (11)\\ &\quad +\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\left(-\frac{4}{T}t+1\right)\cos[2\pi(mf)t]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

問題となるのは $\int t\cos[2\pi(mf)t]\mathrm{d}x$ であり，$f(t)=t$, $g'(t)=\cos[2\pi(mf)t]$ と置いて計算を進める必要がある．

そして最終的にフーリエ係数を以下の表の形式にまとめるよう，指示を出したが MS Word を用いた作表にも問題が多数生じた．

表 1: フーリエ係数のまとめ方

m	1	2	3	$\cdots$	10
a_m	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
b_m	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

MS Word において表を作成するには Word 自身の機能を使う場合と Excel で作表したモノを Word に貼り付ける場合の２種類の方法がある．Word で作表した場合には「数式」などを用いて数式や記号を入力できるが Excel から貼り付ける場合にはセルに「数式」が入力されず，テキストボックスとして認識されてしまう．よって Word による作表を指示した．

また Office 2007 以降の Word に付属の「数式」では論理的に正しい式が書きづらく，フォントが斜め（イタリック）になる場合と立つ（ローマン）場合の条件が不明確である．よって「挿入」タブから「オブジェクト」を選び,「Microsoft 数式 3.0」の利用を勧めた．

学生の中には数式ツールを使わずにフォントサイズの変更だけで上付き，下付きを表そうとした者も居た．しかし独立式との不統一を指摘し，すべての場合に同じ数式ツールを使うことを指示した．

なお，イタリックとローマンの書き分けは「変数はイタリック」,「定数はローマン」として指示は出したが，実験書には明記しなかった．この辺りは学会や個人の考え方で方針が異なる場合があるため明文化しなかった．

4　Excel による波形合成

ここからは２日目の実験になる．先に求めた正弦波と三角波のフーリエ係数に基づき，Excel で描いた高周波成分を足し合わせることで正弦波や三角波に近い波形が合成できることを確認する．

具体的には以下の手順を実験書に記述した．

Excel の基礎知識 I

連続データの作成（A 列に 1 から 1000 までの数値を入れる）

(1) A1 のセルを選択し，“1” を入力

＊ 実際の入力時に “　” は不要.

(2) 右のスクロールバーの上部にある「分割ボックス」をプルダウンし，ワークシートを上下に２分割する．

(3) 下側のワークシートをスクロールし，1000 行目付近を表示させせる．

(4) A1 のセルをクリックし,「SHIFT」キーを押しながら A1000 のセルをクリック．

＊ これで A1 から A1000 までのセルが選択される．

(5) 「ホーム」タブの「編集」→「フィル」→「連続データの作成」を選択．

(6) 「増分値」が「１」であることを確認して「ＯＫ」．

ただしワークシートを２分割する「分割ボックス」は Office2013 以降は無くなっており，その代わりに「表示」タブから「ウィンドウ」枠の「分

割」を選択する必要がある．

続いてデータの入力を以下の指示により行う．

Excel の基礎知識 II

連続データの作成（B 列の 1 から 1000 までに $-\pi$ から π までの数値を均等に入れる）

(1) B1 のセルを選択し，“=A1*2*PI()/1000-PI()” と入力．

∗ この式が何を意味しているか考えること．

(2) B1 から B1000 までのセルを選択．

(3) 「ホーム」タブの「編集」→「フィル」→「下方向へコピー」を選択．

(4) B1 に-3.13531，そこから増えていって B1000 に 3.141593 が入っていることを確認する．

Excel の基礎知識 III

グラフの作成（I）

(1) B1 のセルをクリックして,「挿入」タブから「グラフ」→「散布図」→「散布図（直線）」を選択．

(2) 必要であればグラフをクリックし,「グラフツール」の「デザイン」タブから「データ」→「データの選択」で必要なデータを追加，削除できる．

∗ 「データ範囲」に “= Sheet1! B1 : B1000 ” と入力されている．同時に凡例項目の「編集」をクリックすれば「系列 1 」などと成っている凡例の内容も変更できる．

(3) 同様に「レイアウト」タブから縦軸，横軸の書式，ラベルなどが変更できる．

以上の結果，図 1 を得る．

ここでは散布図を用いたが，学生は折れ線グラフを選びたがる．散布図と折れ線グラフの違いは横軸の選定ができるかどうかである．具体的には表 2 のデータを考え，折れ線グラフと散布図にしてみると図 2 と図 3 を得る．すなわち折れ線グラフの場合は横軸は常に 1, 2, 3, であり，その中央にマーカーが現れる．そして A 列と B 列はそれぞれ異なる 2 本のグラフになる．一方で散布図においては A 列を横軸，B 列を縦軸としてマーカーが打たれる．すなわち $y = f(x)$ の様に，与えられた x の値に対して y の値が定まる場合には散布図を使わないと正しく描画できない．よって上に示したように操作手順を書き表すことで必ず「散布図」を選ぶように仕向けた．しかし学生は「折れ線」に惹かれるようである．

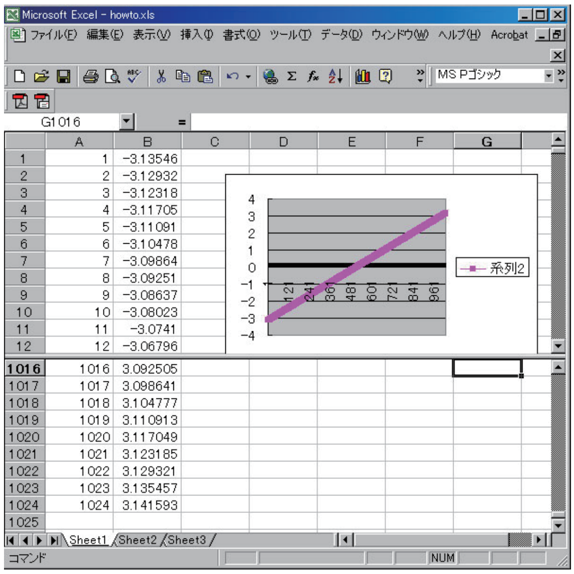

図 1: Excel の基礎知識 I,II,III

表 2: Excel でグラフを描くためのデータ例

	A	B
1	0.1	1
2	0.2	2
3	0.3	3
4	0.4	4
5	0.5	5
6	0.6	6
7	0.7	7
8	0.8	8
9	0.9	9
10	1.0	10

それ以外にも Excel のグラフにはいくつか問題がある．まずは勝手にグラフのタイトルを図の中に書くことである．ソフトウェアサイエンス学科

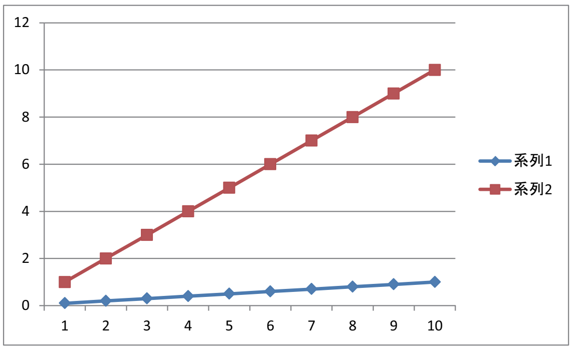

図 2: 折れ線の場合

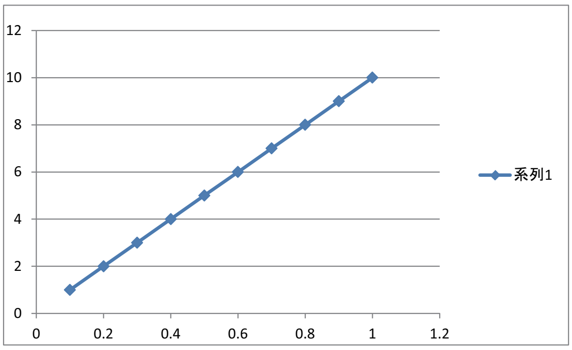

図 3: 散布図の場合

では「図番号，タイトルは図の下」と指示をしている．これは私達の関係する学会の中では IEEE が指針としており，日本の電子情報通信学会もそれに準じていることを受けての指導である．ちなみに「表番号，タイトルは表の上」がやはり基本である．いずれにしても図番号，タイトルを図の中に含めるのではなく，図とは独立して Word 内で挿入すべきである．これは編集過程において図番号，タイトルの変更が必要になった場合に Excel などの図まで戻って変更するのではなく，Word 内の処理で済ませることを目的としている．また，図にタイトルが付くので一本しか線が無い場合は凡例（「系列 1 」など）は必要ない．更に Excel は横軸右側に余白を付けてくれる．図 3 の場合は左に 0 から 0.1 までの余白があるから目立たないが，左端から線が引かれていても右端に空白（図 3 では 1 から 1.2）が存在し，バランスが悪い．でも学生は「Excel の出力がこうなったから」と言ってそのまま貼ってくる例が多い．解決のためには横軸の数値をクリックした後，リボンの「グラフツール」の「レイアウト」タブを選択し，左端にある「選択対象の書式設定」をクリックすれば「軸の書式設定」窓が立ち上がり，軸のオプションで「最大値」を 1.0 に合わせれば良い．

続いて以下の演習を行い，高周波成分の描画の準備を行う．

演習 I

C 列，D 列のそれぞれの 1 行目から 1000 行目に -2π から 2π，-3π から 3π までの数値を均等に入れよ．

この演習においては 1 次関数 $y = ax + b$ の y 切片 b と傾き a を考えて関数を入力して欲しかったが，気づいた学生は C1 のセルに “=2*B1” と入力し，D1 のセルに “=3*B1” と入力していた．

次に，得られた列の値を用いて実際に余弦波（基本波）を描く．

Excel の基礎知識 IV

グラフの作成（II）

(1) E1 のセルを選択し，「数式」タブから「関数ライブラリ」の「数学／三角」をプルダウンし，「COS」（場合によっては「SIN」）を選択する．

(2) 「関数の引数」窓が開いたら「B1」と入力し「OK」．

＊ 結果的に “= COS(B1)” と入力される．

(3) E1 から E1000 までのセルを選択．

(4) 「ホーム」タブの「編集」→「フィル」→「下方向へコピー」を選択．

(5) E1 のセルをクリックして，「挿入」タブから「グラフ」→「散布図」→「散布図（直線）」を選択．

(6) 必要に応じて凡例や縦軸，横軸を見やすく変更する．

最後の項目における凡例，縦軸，横軸の変更も希望の項目をクリックし，リボンの「グラフツール」の「レイアウト」タブを選択し，左端にある「選択対象の書式設定」から可能となる．

上記の「グラフの作成（II）」によってで基本周期の余弦波を描いた．続いて演習 II で振幅を変更したり，演習 III で高調波を描いたりする．

演習 II

上記の手順で得られた余弦 (コサイン) 波のグラフの振幅を 2 倍にする方法を考えて実行し，グラフを作成せよ．

これは式 (7) における $\cos 2\pi mft$ の振幅を a_m とする準備である．

演習 III

「Excel の基礎知識 IV」で得られた余弦波のグラフは 1 から 1000 までを一周期とする余弦波 $\cos[2\pi ft]$ である．すなわち横軸を時間とし，その値「1」から「1000」までを 10^{-3}[sec.] と見なすと周波数 1kHz の余弦波が描けたことになる．

(1) このグラフの横軸で $t=0$ に対応する位置はどこか，考えよ．

(2) 演習 I の結果を利用して周波数が $m(=2,3,\cdots,10)$ 倍の余弦波 $\cos[2\pi(mf)t]$ のグラフも作成せよ．

ここで高調波成分のグラフを作成するが，先の折れ線グラフと散布図で説明した問題が同様に起こる．すなわち，多くの学生は $m=1,2,\cdots,10$ のデータを Excel の列に並べてグラフの準備をする．しかし左端の列には $m=1$ のデータが入っており，それが Excel には「x 軸の値」であると判断されてしまう．その結果，得られるグラフが図 4 のようになってしまうことが多い．ちなみに正解は図 5 のように成るべきである．すなわち，選択するデータの左端に x 軸に対応する値を入れておく必要がある．なおこの例では x 軸を 1 から 1000 までとしたが，座標変換をして -0.5 から 0.5 にし，単位を [ms] とすれば 1kHz の周期信号を扱っていることとなる．この座標変換は実験開始当初，学生に求めたが意味を理解する学生が少なかったため，３年目からは学生に課さなくなった．

また，図 4，5 において凡例が「系列 1，系列 2，⋯」となっているが当然，変更すべきである．それは変更したいグラフを選択した後，「グラフツール」の「デザイン」タブから「データの選択」をクリックし，左にある「凡例項目」の中から希望のデータを選び「編集」ボタンを押すことで希望の文言に変更し，ＯＫを押せば実現できる．

そして合成波形と比較するために元の時間波形

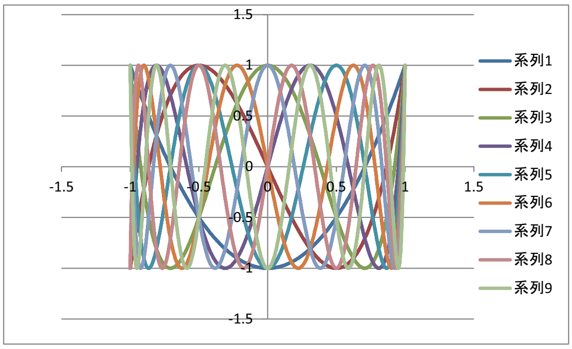

図 4: 高調波成分の描画（失敗例）

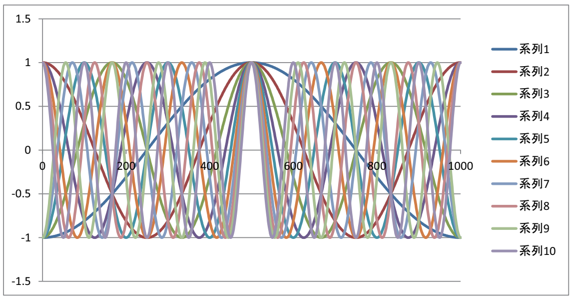

図 5: 高調波成分の描画（成功例）

も演習 IV として描かせた．

演習 IV

式 (8), (9) で示された矩形波，三角波の時間波形も 1 から 1000 を一周期として Excel で作成せよ．

この場合も矩形波は容易に描けるが三角波は手こずる学生が多かった．すなわち矩形波の場合は「1 から 250 まで -1，251 から 750 まで 1，そして 751 から 1000 までに -1」を入力すれば描ける．しかし三角波の場合は「1 のときに $-1(+\alpha)$，そこから 1 次関数として増加し，500 のときに 1．そして一次関数として減少し 1000 のときに -1」となる必要がある．そのため 1 から 500 までには “=2*A1/500-1” などと入力し，501 から 1000 までには “=(-2)*A501/500+3” などと入力する必要がある．自分でこれを考えて入力できた学生は半数未満であった．

ここまでの準備が終わって，いよいよ波形合成の実験である．

実験内容

1) 周期 T の矩形(くけい)波，三角波のフーリエ係数（a_m, b_m, $m=0,1,2,\cdots,10$）は既に求め

てある．

2) 演習 III で作成した余弦波 $\cos[2\pi(mf)t]$（$m = 0, 1, 2, \cdots, 10$）の振幅をフーリエ係数 a_m に変更し，Excel 上に $a_m\cos[2\pi(mf)t]$ のデータを準備する．

必要であれば $b_m\sin[2\pi(mf)t]$ のデータも準備する．

3) 式 (7) のフーリエ級数展開を有限の周波数成分（$M = 5, 10$）まで足し合わせた場合に得られる波形 $f'(t)$ が元の時間波形 $f(t)$ に近いかどうかを Excel でグラフにして観察する．

$$f'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{M} (a_m\cos[2\pi(mf)t] + b_m\sin[2\pi(mf)t]) . \quad (12)$$

M の違いが合成された波形 $f'(t)$ にどう影響するか理解する．

この実験内容を処理する手助けとして次の基礎知識も掲載した．

Excel の基礎知識 V

$\sum_{m=1}^{M} x_m (= x_1 + x_2 + \cdots + x_M)$ の計算

(1) $\sum_{m=1}^{M} x_m$ の結果を入力したいセルを選択する．

(2) 「数式」タブから「関数ライブラリ」の「数学／三角」をプルダウンし,「SUM」を選択する．

(3) 「関数の引数」窓が開いたら,「数値 1」に x_1 の値が入っているセル,「数値 2」に x_2 の値が入っているセル，として x_M の値が入っているセルまでを順次選択する．

(4) 「OK」を押すことによって計算結果が最初のセルに表示される．

＊ 必要であれば「下方向にコピー」して上記の計算を下のセルにも反映させる．

これによって元の波形，合成波（$M = 5, 10$）のグラフが出来上がる．まずは期待される結果を図 6 と図 7 に示す．

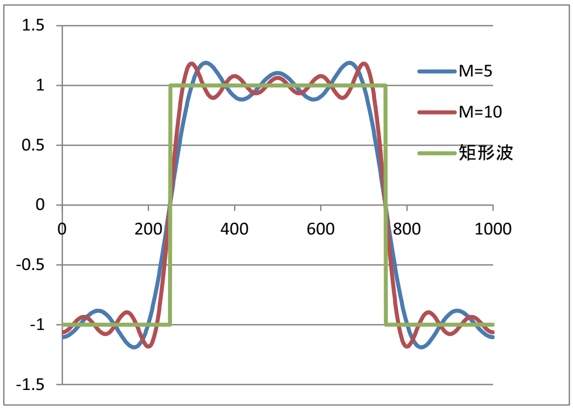

図 6: 矩形波の合成波形と元波形

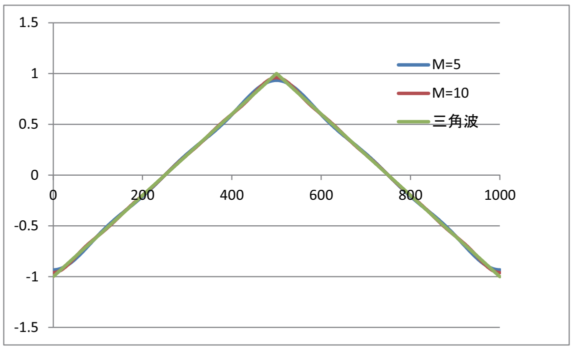

図 7: 三角波の合成波形と元波形

ここまでのグラフ作成で良く見られたエラーは，矩形波のフーリエ係数が全て正の値に成っており合成波が不思議な形に成っている場合がある．エラーグラフに慣れてくると「この図形はこのエラー」と判断できるようになる．また三角波の場合にはエラーではないが 3 本の線がほぼ重なるため，グラフの太さや前後の順番を工夫することで見やすいグラフが作成できる．

また C 言語のプログラムによってフーリエ係数 a_m と $\cos[2\pi(mf)t]$ の値を計算し，式 (12) において $M = 20$ や 30 の場合のデータを求めることも可能である．そして csv 形式でファイル出力し，Excel で読み込むことによって図 6，7 と重ねて描くことも可能である．プログラム例を以下に示す．

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int main(void)
{
```

```
    double sum,am;
    double pi = 3.14159265;
    int i,m;
    FILE *fp;
    fp=fopen("data1.csv","w");
    for(i=1;i<=1000;i++){
        sum=0;
        for(m=1;m<=30;m++){
            am=4.0/(pi*m)*sin(pi*m/2.0);
            printf("%d,%f\n",m,am);
            sum=sum +am*cos(m*(2.0*pi
                *i/1000.0-pi));
        }
        fprintf(fp,"%d,%f\n",i,sum);
    }
    fclose(fp);
    return 0;
}
```

実際にプログラムでデータを作ってグラフに載せた学生が過去に数名居る．

これらの内容が確認できた上で発展演習として以下の内容を記した．

発展演習 I

以下に示す波形についてもフーリエ係数を導出し，その振幅の正弦波（もしくは余弦波）を足し上げることによって元の波形が再現されることを確認せよ．

- 一周期が次式で定義される矩形波

$$f(t) = \begin{cases} -1 & -T/2 \leq t < 0, \\ 1 & 0 \leq t < T/2. \end{cases} \tag{13}$$

- 一周期が次式で定義される波形（$f = 1/T$）

$$f(t) = \cos\left[2\pi ft + \frac{\pi}{4}\right], \quad -T/2 < t < T/2. \tag{14}$$

発展演習 II

元の時間波形 $f(t)$ と式（12）に基づいて合成された波形 $f'(t)$ との差異がどの程度あるのかをそれぞれの波形について数値で示せ．

- 差異を求める一例として $|f(t) - f'(t)|$ の積分，すなわち $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t) - f'(t)| \mathrm{d}t$ で評価できる．
- 実際には Excel 上で各時刻 t_i に対応する離散的データをそれぞれ $f(t_i)$ と $f'(t_i)$ として得ているので $\sum_{i=1}^{1000} |f(t_i) - f'(t_i)|$ を計算すればよい．
- 上記とは異なる評価方法についても考えてみよ．

残念ながら発展演習 I を解く学生は 1 年に一人か二人，発展演習 II に至っては過去 10 年ほどの間に片手で足りる数しか存在しなかった．特にこの 5 年ほどは皆無である．

5　まとめ

ソフトウェアサイエンス実験で行ってきたフーリエ解析の修得目標とその実験内容を示した．各項目で生じる問題点とそれに対する解決策について具体的に示した．これらの内容が将来の学生実験，もしくはフーリエ解析の講義に役立つと幸いである．

参考文献

[1] 土山牧夫，宗像勉，山崎浩一，小川晃，大崎正雄，ソフトウェアサイエンス実験 I 指導書，第 1 版，2009 年 9 月 11 日

[2] 土山牧夫，宗像勉，山崎浩一，小川晃，大崎正雄，ソフトウェアサイエンス実験 I 指導書，**2013 年版**，2013 年 9 月 18 日

2016 年 2 月 29 日原稿受付，2016 年 3 月 14 日採録決定
Received, February 29, 2016; accepted, March 14, 2016