不動点定理と α 階常微分方程式の解の存在と一意性

Fixed point theorems and existence and uniqueness of solutions for α-th order ordinary differential equations

豊田昌史
Masashi Toyoda

玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Department of Management Science, College of Engineering, Tamagawa University, 6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

In this paper, initial value problems of fractional differential equations are discussed. We obtain the existence and uniqueness of solutions for the problems. Two proofs are given. In the first proof, we don't use any fixed point theorems. In the second proof, we use the fixed point theorem for contraction mappings.

Keywords: Initial value problems, fractional differential equations, fixed point theorems.

1　はじめに

[4] には, 以下の定理に対して, 縮小写像の不動点定理を用いる場合と用いない場合の証明が記されている.

定理 1. $a, b > 0$ とする. $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D を $D = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}$ とする. f を D で連続な関数とし, $L > 0$ が存在して, 任意の $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ に対して

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, $[x_0, x_0 + h]$ から $\mathbf{R}$ へのある関数 y が存在して

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y'(x_0) = y_0 \end{cases}$$

をみたす. ただし h は

$$h < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$$

をみたす正定数である. ここで

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$$

である.

本論文では, 以下の定理に対して, 縮小写像の不動点定理を用いる場合と用いない場合の証明を記す. 定理 2 は定理 1 の拡張である. 実際, 定理 2 で $\alpha = 1$ の場合が定理 1 になる.

定理 2. $0 < \alpha \leq 1$, $a, b > 0$ とする. $\mathbf{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \left\{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + a, \left|y - \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\right| \leq b\right\}$$

とする. f を D で連続な関数とし, $L > 0$ が存在して, 任意の $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ に対して

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

をみたすとする. このとき, $[x_0, x_0 + h]$ から $\mathbf{R}$ へのある関数 y が存在して

$$\begin{cases} D^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \\ D^\alpha y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

をみたす. ただし h は

$$h < \min\left\{a, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)b}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

をみたす正定数である．ここで

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$$

である．

定理 2 の D^α は α 階 Riemann-Liouville 微分である．すなわち, $(0,\infty)$ から $\mathbf{R}$ への関数 y の α 階 Riemann-Liouville 微分は

$$D^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^x \frac{u(s)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt$$

で定める．ここで $n=[\alpha]+1$ であり $[\alpha]$ は α を越えない最大の自然数である．すなわち, n は $n-1\leq\alpha\leq n$ をみたす自然数である．Γ はガンマ関数である．ガンマ関数に関して

$$\int_a^x (x-t)^{p-1}(t-a)^{q-1}dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}(x-a)^{p+q-1}$$

が成り立つ (例えば, [6, p.70])．ここで $p,q>0$ である．

2　定理 2 の証明その 1

定理 2 の証明を示す．

証明．積分方程式

$$y(x) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt$$

をみたす y がただひとつ存在することを示す．D の部分集合 D_0 を

$$D_0 = \left\{(x,y) \mid x_0\leq x\leq x_0+h,\ \left|y-\frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\right|\leq b\right\}$$

で定める．関数列 $\{y_n\}$ を

$$y_1(x) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

および $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$y_{n+1}(x) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,y_n(t))dt$$

で定める．

$n\in\mathbf{N}$ に対して $(x,y_n(x))\in D_0$ である．実際, $n\in\mathbf{N}$, $x\in[x_0,x_0+h]$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left|y_n(x)-\frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,y_{n-1}(t))dt\right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right| \\
&= \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x-x_0)^\alpha \\
&\leq \frac{Mh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq b
\end{aligned}$$

である．よって $(x,y_n(x))\in D_0$ である．

$n\in\mathbf{N}$, $x\in[x_0,x_0+h]$ に対して

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{\Gamma(n\alpha+1)}(x-x_0)^{n\alpha}$$

が成り立つ．これを数学的帰納法で示す．$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
&|y_2(x)-y_1(x)| \\
&= \left|y_2(x)-\frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,y_1(t))dt\right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}dt\right| \\
&= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(x-x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

が成り立つ．n で成り立つとする．このとき

$$\begin{aligned}
&|y_{n+2}(x)-y_{n+1}(x)| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}\left(f(t,y_{n+1}(t)) - f(t,y_n(t))\right)dt\right| \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}|y_{n+1}(t)-y_n(t)|dt\right| \\
&\leq \frac{ML^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)} \times \left|\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1}(t-x_0)^{n\alpha}dt\right|
\end{aligned}$$

$$= \frac{ML^n}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)}$$

$$\times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}(x-x_0)^{(n+1)\alpha}$$

$$= \frac{ML^n}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}(x-x_0)^{(n+1)\alpha}$$

である．よって $n+1$ でも成り立つ．

また

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ML^{n-1}h^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} < \infty$$

である．実際, $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$a_n = \frac{ML^{n-1}h^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \frac{ML^n h^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{ML^{n-1}h^{n\alpha}} \\
&= Lh^\alpha \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} \\
&= Lh^\alpha \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+\alpha+1)} \\
&= \frac{Lh^\alpha}{(n\alpha)^\alpha} \cdot \frac{(n\alpha)^{\alpha+1}\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma(n\alpha+1)}{(n\alpha)\Gamma(n\alpha)}
\end{aligned}$$

である．よって $n \to \infty$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$$

である．ここで

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+s)}{x^s\Gamma(x)} = 1$$

に注意されたい (例えば, [3, p.341])． したがって, 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ であるから, ダランベールの判定法 (例えば, [5, p.4]) より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ML^{n-1}h^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} < \infty$ である．

M 判定法 (例えば, [5, p.19]) より, 関数列 $\{y_n\}$ は $[x_0, x_0+h]$ で関数 $\overline{y}$ に一様収束する．このとき

$$\overline{y}(x) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t,\overline{y}(t))dt$$

である．$\overline{y}$ は解となる．

次に一意性を示す．$\hat{y}$ も解とする．このとき, 任意の $x \in [x_0, x_0+h]$, $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$|\overline{y}(x) - \hat{y}(x)| \leq \frac{NL^n}{\Gamma(n\alpha+1)}(x-x_0)^{n\alpha}$$

が成り立つ．ここで

$$N = \sup_{x\in[x_0,x_0+h]} |\overline{y}(x) - \hat{y}(x)|$$

である．これを数学的帰納法で示す．$n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
&|\overline{y}(x) - \hat{y}(x)| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\left(f(t,\overline{y}(t)) - f(t,\hat{y}(t))\right)dt\right| \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}|\overline{y}(t)-\hat{y}(t)|dt\right| \\
&\leq \frac{NL}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}dt\right| \\
&= \frac{NL}{\Gamma(\alpha+1)}(x-x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

である．n で成り立つとすると

$$\begin{aligned}
&|\overline{y}(x) - \hat{y}(x)| \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}|\overline{y}(t)-\hat{y}(t)|dt\right| \\
&\leq \frac{ML^{n+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)} \times \left|\int_{x_0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-x_0)^{n\alpha}dt\right| \\
&= \frac{ML^{n+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n\alpha+1)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}(x-x_0)^{(n+1)\alpha} \\
&= \frac{ML^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}(x-x_0)^{(n+1)\alpha}
\end{aligned}$$

である．よって $n+1$ でも成り立つ．

$n \to \infty$ として $\overline{y} = \hat{y}$ が成り立つ．よって, 解はただ一つ存在する．□

3　定理 2 の証明その 2

本節では, 定理 2 を縮小写像の不動点定理を用いて示す. $C[a,b]$ を $[a,b]$ から $\mathbf{R}$ への連続関数全体からなる集合とする. $y \in C[a,b]$ に対してノルム $\|\cdot\|$ を

$$\|y\| = \max_{x\in[a,b]} |y(x)|$$

とおくと $C[a,b]$ は Banach 空間となる.

定理 2 の証明を示す.

証明. $C[x_0, x_0+h]$ の部分集合 D_0 を $D_0 = \left\{ y \mid \left| y - \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \right| \le b \ (x \in [x_0, x_0+h]) \right\}$ で定める. D_0 上の作用素 T を

$$\begin{aligned} Ty(x) = {} & \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

で定める.

$y \in D_0$ ならば $Ty \in D_0$ である. 実際, $y \in D_0$ とする. $[x_0, x_0+h]$ の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x$ をみたすとする. $n \in \mathbf{N}$ とする. 平均値の定理より, ある $c_1 \in (x_n, x)$ (または $c_1 \in (x, x_n)$) が存在して

$$|x_n^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}| = (\alpha-1) c_1^{\alpha-2} |x_n - x|$$

である. よって, ある定数 L_1 が存在して

$$|x_n^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}| \le L_1 |x_n - x|$$

である. また, ある $c_2 \in (x_n - t, x - t)$ (または $c_2 \in (x-t, x_n-t)$) が存在して

$$|(x_n - t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}| = (\alpha-1) c_2^{\alpha-2} |x_n - x|$$

である. よって, ある定数 L_2 が存在して

$$|(x_n - t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}| \le L_2 |x_n - x|$$

である. よって

$$\begin{aligned} & |Ty(x_n) - Ty(x)| \\ & \le \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)} |x_n^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}| \\ & + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_x^{x_n} |(x_n-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}| dt \right| \\ & \le \frac{y_0 L_1}{\Gamma(\alpha)} |x_n - x| + \frac{M L_2}{\Gamma(\alpha)} |x_n - x|^2 \end{aligned}$$

より $x_n \to x$ のとき

$$Ty(x_n) \to Ty(x)$$

である. したがって $Ty \in C[x_0, x_0+h]$ を得る. さらに $Ty \in D_0$ である. 実際, $x \in [x_0, x_0+h]$ とする. このとき

$$\begin{aligned} & \left| (Ty)(x) - \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \right| \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ & \le \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt \right| \\ & = \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} (x - x_0)^{\alpha} \\ & \le \frac{M h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ & \le b \end{aligned}$$

より $Ty \in D_0$ である.

また T は縮小写像である. 実際, $y_1, y_2 \in D_0$, $x \in [x_0, x_0+h]$ とする.

$$\begin{aligned} & |Ty_1(x) - Ty_2(x)| \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \left(f(t, y_1(t)) \right. \right. \\ & \qquad \left. \left. - f(t, y_2(t)) \right) dt \right| \\ & \le \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} |y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \\ & \le \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{x_0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt \right| \|y_1 - y_2\| \\ & = \frac{L}{\alpha\Gamma(\alpha)} (x - x_0)^{\alpha} \|y_1 - y_2\| \\ & \le \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

である. よって

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \le \frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\|$$

を得る. ここで

$$\frac{L h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

より T は縮小となる.

したがって, 縮小写像の不動点定理より T はただひとつの不動点 $\bar{y}$ をもつ. □

注意 1. [1] では, 定理 1 を α 階微分方程式に拡張した結果が紹介されている. その際, Weissinger の不動点定理 ([7]) を用いて証明されている. Weissinger の不動点定理は, 縮小写像の不動点定理のひとつの拡張である.

注意 2. [8] では, さらに特異性をもつ方程式の場合が扱われている. 定理 2 を特異性をもつ場合にまで拡張した定理に対して, 不動点定理を用いる場合と用いない場合の証明を示すのも面白い. [2] も参照されたい.

参考文献

[1] K. Diethelm, N. J. Ford, *Analysis of fractional differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265 (2002), 229–248.

[2] T. Jankowski, *Boundary problems for fractional differential equations*, Applied Mathematics Letters, 28 (2014), 14–19.

[3] 杉浦光男, 解析入門 I, 東京大学出版会, 1980.

[4] 高橋渉, 現代解析学入門, 近代科学社, 1990.

[5] 豊田昌史, 微分方程式の解法, 横浜図書, 2010.

[6] 豊田昌史, 渡辺俊一, 微分方程式の境界値問題への半順序集合における不動点定理の 2 つの適用例, 玉川大学工学部紀要, 50 (2015), 67–78.

[7] J. Weissinger, *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*, Mathematische Nachrichten, 8 (1952), 193–212.

[8] X. Yang, Y. Liu, *Picard iterative processes for initial value problems of singular fractional differential equations*, Advances in Difference Equations, 2014, 2014:102.

2016 年 3 月 18 日原稿受付, 2016 年 3 月 30 日採録決定
Received, March 18, 2016; accepted, March 30, 2016