微分方程式の境界値問題への半順序集合における不動点定理の2つの適用例

Two examples obtained by using a fixed point theorem in partial ordered sets to boundary value problems for differential equations

豊田昌史 ‡　渡辺俊一 *

Masashi Toyoda　Toshikazu Watanabe

‡ 玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
College of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

* 日本大学理工学部, 101–8308 東京都千代田区神田駿河台 1–8–14
College of Science and Technology, Nihon University,
1–8–14 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101–8308

Abstract

In this paper, we apply a fixed point theorem in partial ordered set [17] to two boundary value problems for differential equations. First problem is a boundary value problem for fourth order differential equations. Second problem is a boundary value problem for α order differential equations with $3 < \alpha \leq 4$.

Keywords: Fixed point theorem, partially ordered set, boundary value problems.

第1節　はじめに

$(X, \leq)$ を半順序集合とする．半順序集合の点列 $\{x_n\}$ が単調非減少であるとは, $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$ が成り立つときをいう． X から X への写像 T が単調非減少であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ ならば $Tx \leq Ty$ が成り立つときをいう．

[17] において, 次の定理が示されている．

定理 1. $(X, \leq)$ を半順序集合とする． 距離 d が存在して (X, d) が完備距離空間とする． X の単調非減少な点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x \in X$ $(n \to \infty)$ をみたすならば, 任意の $x_n \in X$ に対して $x_n \leq x$ をみたすとする． T を X から X への写像で単調非減少とする． ある $k \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \leq y$ ならば

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

をみたすとする． ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする． このとき T は不動点をもつ．任意の $x, y \in X$ に対して, ある $z \in X$ が存在して, $x \leq z$ かつ $y \leq z$ をみたすならば, 不動点は一意である．

定理 1 のように, 順序を仮定した距離空間における不動点定理の研究が現在進められている．80 年代には, [26] による研究がある．[19] では, 定理 1 の T に連続を仮定した場合の結果が得られている．その場合, 空間 X に「X の単調非減少な点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x \in X$ $(n \to \infty)$ をみたすならば, 任意の $x_n \in X$ に対して $x_n \leq x$ をみたすとする」という仮定は不要になる．[19] や [17] の結果を拡張する試みもなされている．例えば, [9] を参照されたい．

順序を仮定した距離空間における不動点定理は, さまざまな問題に適用されている． [19] では, エルミート行列全体からなる空間において, 行列に関する方程式の解の存在と一意性を扱っている．[17] では, 1 階微分方程式の周期解の解の存在と一意性を扱っている．これらの結

果を参考に, 筆者らは, [22] で 4 階微分方程式の境界値問題 また, [25] で α 階微分方程式の境界値問題の解の存在と一意性を扱った. ここで $3<\alpha\leq 4$ である. しかし, [22] および [25] には, 一部, 計算に不備があることがその後の研究でわかった. そこで, 修正された計算を本論文で示す. また, 修正するだけでなく, 新しく得た結果も述べる. 具体的には, 第 2 節で [22] を修正した結果を示す (定理 2). また, [22] のときには得られなかった結果 (定理 3 と例 1, 2) も記す. 第 3 節で [25] を修正した結果を示す (定理 9). 定理 9 は [25] を拡張した結果になっている.

第 2 節　適用例その 1

本節では, 定理 1 を境界値問題

$$\begin{cases} y''''(t)+f(t,\,y(t),\,y''(t))=0, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases}$$

に適用する. ただし f は $[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続関数である. $y_0\in C^4(I,\mathbf{R})$ がこの境界値問題の下解であるとは

$$\begin{cases} y_0''''(t)+f(t,\,y_0(t),\,y_0''(t))\leq 0, \\ y_0(0)=y_0(1)=y_0''(0)=y_0''(1)=0 \end{cases}$$

をみたすときをいう.

定理 1 より, 次を得る.

定理 2. f を $[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への連続関数とする. ある $\mu\in(0,8)$ が存在して, 任意の $y_1\leq y_2$, $u_1\geq u_2$ となる $y_1,y_2,u_1,u_2\in\mathbf{R}$ および $t\in I$ に対して

$$0\leq f(t,y_1,u_1)-f(t,y_2,u_2)\leq\mu(u_1-u_2)$$

が成り立つとする.

$$y_0'''(0)\leq\int_0^1\left(\int_0^t f(s,y_0(s),y_0''(s))ds\right)dt$$

をみたす下解 y_0 が存在するとする. このとき, 境界値問題

$$\begin{cases} y''''(t)+f(t,\,y(t),\,y''(t))=0, \\ y(0)=y(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases}$$

の解が一意に存在する.

証明. $X=C([0,1],\mathbf{R})$ とする. 任意の $x,\,y\in X$ に対して $x\leq y$ を

$$x(t)\leq y(t)\ (t\in[0,1])$$

で定める. このとき $(X,\leq)$ は順序集合である. X の距離 d を

$$d(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(y)|$$

で定めるとき, (X,d) は完備距離空間である.

$\{x_n\}$ を X の単調非減少列で $x_n\to x$ をみたすものとする. このとき $x(t)=\sup_{n\in\mathbb{N}}x_n(t)$ であるから $x_n(t)\leq x(t)$ である. したがって $x_n\leq x$ である.

X から X への写像 T を

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s),u(s))ds$$

で定める. ここで

$$y(t)=-\int_0^1 G(t,s)u(s)ds$$

かつ

$$G(t,s)=\begin{cases}(1-t)s, & 0\leq s\leq t\leq 1,\\ (1-s)t, & 0\leq t\leq s\leq 1\end{cases}$$

である. このとき T は単調非減少である. 実際, $u_1\geq u_2$ となる $u_1,u_2\in X$ に対して

$$\begin{aligned} y_1(t)&=-\int_0^1 G(t,s)u_1(s)ds\\ &\leq-\int_0^1 G(t,s)u_2(s)ds\\ &=y_2(t)\end{aligned}$$

が任意の $t\in[0,1]$ に対して成り立つ. ここで $G(t,s)\geq 0$ が任意の $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ に対して成り立つことに注意されたい. さらに $f(t,y_1(t),u_1(t))\geq f(t,y_2(t),u_2(t))$ である. したがって $Tu_1(t)\geq Tu_2(t)$ を得る.

ある $k\in[0,1)$ が存在して, 任意の $u_1,u_2\in X$ に対して $u_1\geq u_2$ ならば

$$d(Tu_1(t),Tu_2(t))\leq kd(u_1(t),u_2(t))$$

が成り立つことを示す．$u_1 \geq u_2$ とする．このとき $y_1 \leq y_2$ である．さらに

$$\begin{aligned}
&d(Tu_2(t), Tu_1(t)) \\
&= \sup_{0\leq t\leq 1} |Tu_2(t) - Tu_1(t)| \\
&\leq \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)\times \\
&\qquad |f(s, y_2(s), u_2(s)) - f(s, y_1(s), u_1(s))|ds \\
&\leq \mu \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)|u_2(s) - u_1(s)|ds \\
&\leq \mu d(u_2, u_1) \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)ds \\
&= \mu d(u_2, u_1)\times \\
&\qquad \sup_{0\leq t\leq 1} \left(\int_0^t (1-t)sds + \int_t^1 (1-s)tds \right) \\
&= \frac{\mu}{2} d(u_2, u_1) \sup_{0\leq t\leq 1} t(1-t) \\
&\leq \frac{\mu}{8} d(u_2, u_1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\alpha = y_0''$ とおく．$\alpha \leq T\alpha$ となることを示す．$\alpha''(s) \leq -f(s, y_0(s), \alpha(s))$ が任意の $s \in [0,1]$ に対して成り立つので

$$\alpha'(t) \leq \alpha'(0) - \int_0^t f(s, y_0(s), \alpha(s))ds$$

を得る．さらに

$$\alpha(x) \leq \alpha'(0)x - \int_0^x \left(\int_0^t f(s, y_0(s), \alpha(s))ds \right) dt$$

である．下解 y_0 がみたす仮定から

$$\alpha'(0) \leq \int_0^1 \left(\int_0^t f(s, y_0(s), \alpha(s))ds \right) dt$$

である．このとき

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &\leq x \int_0^1 \left(\int_0^t f(s, y_0(s), \alpha(s))ds \right) dt \\
&\quad - \int_0^x \left(\int_0^t f(s, y_0(s), \alpha(s))ds \right) dt \\
&= \int_0^1 G(x,t) f(t, y_0(t), \alpha(t))dt \\
&= T\alpha(x)
\end{aligned}$$

が任意の $x \in [0,1]$ に対して成り立つ．よって $\alpha \leq T\alpha$ である．定理 1 より解が一意に存在する．□

定理 2 の下解 y_0 のみたすべき条件

$$y_0'''(0) \leq \int_0^1 \left(\int_0^t f(s, y_0(s), y_0''(s))ds \right) dt$$

はどのようなときに成り立つのか．写像 f を $[0,1] \times \mathbf{R} \times [0,\infty)$ から $[0,\infty)$ で考えると成り立つ．実際, 次を得る．

定理 3. f を $[0,1] \times \mathbf{R} \times [0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への連続関数とする．ある $\mu \in (0,8)$ が存在して, 任意の $y_1, y_2, u_1, u_2 \in \mathbf{R}$ に対して, $y_1 \leq y_2$ かつ $u_1 \geq u_2$ ならば, 任意の $t \in I$ に対して

$$0 \leq f(t, y_1, u_1) - f(t, y_2, u_2) \leq \mu(u_1 - u_2)$$

をみたす．このとき, 境界値問題

$$\begin{cases} y''''(t) + f(t,\, y(t),\, y''(t)) = 0, \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

の解が一意に存在する．

証明．$X = C([0,1], \mathbf{R})$ とする．このとき $(X, \leq)$ は定理 2 と同様, 完備距離空間であり, 半順序集合である．X から X への写像 T を

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, y(s), u(s))ds$$

で定める．ここで

$$y(t) = -\int_0^1 G(t,s)u(s)ds$$

かつ

$$G(t,s) = \begin{cases} (1-t)s, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ (1-s)t, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

である．このとき, 定理 2 と同様にして, T は単調非減少であり, ある $k \in [0,1)$ が存在して, $u_1 \geq u_2$ ならば

$$d(Tu_1(t), Tu_2(t)) \leq kd(u_1(t), u_2(t))$$

である．f と G は非負なので

$$T0 = \int_0^1 G(t,s) f(s, y(s), 0)ds \geq 0$$

である．定理 1 より解が一意に存在する．□

例 1. $\lambda > 0$ とする．境界値問題

$$\begin{cases} y''''(t) + \lambda \log(y'' + 2) = 0, \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

を考える． 定理 3 において $f(t, y, u) = \lambda \log(u + 2)$ とすると $y_1 \leq y_2$ および $u_1 \geq u_2 \geq 0$, $t \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} & f(t, y_1, u_1) - f(t, y_2, u_2) \\ & = \lambda(\log(u_1 + 2) - \log(u_2 + 2)) \\ & = \lambda \log\left(\frac{u_1 + 2}{u_2 + 2}\right) \\ & = \lambda \log\left(1 + \frac{u_1 - u_2}{u_2 + 2}\right) \\ & \leq \lambda \log(1 + u_1 - u_2) \\ & \leq \lambda(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．このとき, 定理 3 より解が一意に存在する．

例 2. $\lambda > 0$ とする．境界値問題

$$\begin{cases} y''''(t) + \frac{\lambda}{2}(\log(y'' + 2) + y'') = 0, \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases}$$

を考える． 定理 3 において $f(t, y, u) = \frac{\lambda}{2}(\log(u + 2) + u)$ とすると $y_1 \leq y_2$ および $u_1 \geq u_2 \geq 0$, $t \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} & f(t, y_1, u_1) - f(t, y_2, u_2) \\ & = \frac{\lambda}{2}(\log(u_1 + 2) - \log(u_2 + 2) + u_1 - u_2) \\ & = \frac{\lambda}{2}\left(\log\left(\frac{u_1 + 2}{u_2 + 2}\right) + u_1 - u_2\right) \\ & = \frac{\lambda}{2}\left(\log\left(1 + \frac{u_1 - u_2}{u_2 + 2}\right) + u_1 - u_2\right) \\ & \leq \frac{\lambda}{2}(\log(1 + u_1 - u_2) + u_1 - u_2) \\ & \leq \frac{\lambda}{2}(u_1 - u_2 + u_1 - u_2) \\ & = \lambda(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．このとき, 定理 3 より解が一意に存在する．

第 3 節　適用例その 2

$1 < \alpha \leq 2$, $1 < \beta \leq 2$, $2 < \alpha + \beta \leq 4$ とする．境界値問題

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha u(t)) + f(t, u(t)) = 0, \\ u(0) = u(1) = (D^\alpha u)(0) = (D^\alpha u)(1) = 0 \end{cases}$$

を考える． ここで D^α は α 階の Riemann-Liouville 微分である．f は $[0, 1] \times \mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への関数である．

u を $(0, \infty)$ から $\mathbf{R}$ への関数とする．u の α 階 Riemann-Liouville 微分は

$$D^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{u(s)}{(t - s)^{\alpha - n + 1}} ds$$

で定める．ここで $n = [\alpha] + 1$ であり $[\alpha]$ は α を越えない最大の自然数である．すなわち, n は $n - 1 \leq \alpha < n$ をみたす自然数である．Γ はガンマ関数である．一方, u の α 階 Riemman-Liouville 積分は

$$I^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} u(s) ds$$

で定める．

補助命題 4 や補助命題 5 で式

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\int_a^x (x - t)^{p-1} (t - a)^{q-1} dt} \\ & \boldsymbol{= \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} (x - a)^{p+q-1}} \end{aligned}$$

を用いる．念のため, 証明を記す．$t - a = s$ とおくと $dt = ds$ であり t の積分区間が $a \to x$ と変化するとき s は $0 \to x - a$ と変化する．よって

$$\begin{aligned} & \int_a^x (x - t)^{p-1} (t - a)^{q-1} dt \\ & = \int_0^{x-a} (x - a - s)^{p-1} s^{q-1} ds \end{aligned}$$

である．さらに $\frac{s}{x-a} = u$ とおくと $\frac{1}{x-a} ds = du$ であり s の積分区間が $0 \to x - a$ と変化する

とき u は $0 \to 1$ と変化する．よって

$$\begin{aligned}
&\int_a^x (x-t)^{p-1}(t-a)^{q-1}dt \\
&= \int_0^{x-a} (x-a-s)^{p-1}s^{q-1}ds \\
&= \int_0^1 (x-a-(x-a)u)^{p-1} \times \\
&\quad (x-a)^{q-1}u^{q-1}(x-a)du \\
&= (x-a)^{p+q-1}\int_0^1 (1-u)^{p-1}u^{q-1}du \\
&= (x-a)^{p+q-1}B(p,q) \\
&= (x-a)^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}
\end{aligned}$$

を得る．

$\alpha > 0$, $\beta > 0$ のとき

$$\boldsymbol{I^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta}}$$

である．実際

$$\begin{aligned}
I^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}s^\beta ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

である．また

$$\boldsymbol{D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}t^{\beta-\alpha}}$$

である．実際 n を自然数とした場合

$$D^n t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}t^{\beta-n}$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
&D^\alpha t^\beta \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}s^\beta ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}t^{n-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{d^n}{dt^n}t^{n-\alpha+\beta} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}t^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

である．

補助命題 4. $\alpha > 0$ とする．$u(t) = t^{\alpha-n}$ $(n = 1, 2, \ldots, [\alpha]+1)$ のとき，$D^\alpha u = 0$ である． 逆に $D^\alpha u(t) = 0$ ならば，ある $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}$$

である．ここで $n = [\alpha]+1$ である．

証明．$u(t) = t^{\alpha-n}$ $(n = 1, 2, \ldots, [\alpha]+1)$ のとき，$D^\alpha u = 0$ である． 実際

$$\begin{aligned}
D^\alpha u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る．

逆を示す．$D^\alpha u(t) = 0$ とする．定義より

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds = 0$$

すなわち

$$\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds = 0$$

である．これより

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds = C_1$$

である．また

$$\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds = C_1t + C_2$$

である．同様に

$$\frac{d^{n-3}}{dt^{n-3}}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds = C_1t^2 + C_2t + C_3$$

である．ただし $\frac{C_1}{2}$ をあらためて C_1 とした．以下, 適宜, 定数を置き換える．繰り返すと

$$\begin{aligned}&\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds\\ &\quad = C_1t^{n-1} + C_2t^{n-2} + \cdots + C_n\end{aligned}$$

である．ここで両辺に I^α を施すと

$$\begin{aligned}
&(\text{左辺})\\
&= I^\alpha \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\times\\
&\qquad\qquad \left(\int_0^s (s-\tau)^{n-\alpha-1}u(\tau)d\tau\right)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t u(\tau)\times\\
&\qquad \left(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{n-\alpha-1}ds\right)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)}(t-\tau)^{n-1}\\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}u(\tau)d\tau\\
&= \Gamma(n-\alpha)I^n u(t)
\end{aligned}$$

である．ここで 3 つめの等号は積分順序の交換をした．また

$$\begin{aligned}
&(\text{右辺})\\
&= I^\alpha(C_1t^{n-1} + C_2t^{n-2} + \cdots + C_n)\\
&= C_1t^{\alpha+n-1} + C_2t^{\alpha+n-2} + \cdots + C_nt^\alpha
\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}&\Gamma(n-\alpha)I^n u(t)\\ &\quad = C_1t^{\alpha+n-1} + C_2t^{\alpha+n-2} + \cdots + C_nt^\alpha\end{aligned}$$

すなわち, 定数を置き換えて

$$I^n u(t) = C_1t^{\alpha+n-1} + C_2t^{\alpha+n-2} + \cdots + C_nt^\alpha$$

を得る．さらに両辺に D^n を施すと

$$D^nI^nu(t) = u(t)$$

であり

$$\begin{aligned}&D^n(C_1t^{\alpha+n-1} + C_2t^{\alpha+n-2} + \cdots + C_nt^\alpha)\\ &\quad = C_1t^{\alpha-1} + C_2t^{\alpha-2} + \cdots + C_nt^{\alpha-n}\end{aligned}$$

であるから

$$u(t) = C_1t^{\alpha-1} + C_2t^{\alpha-2} + \cdots + C_nt^{\alpha-n}$$

を得る．□

次は, [21, Theorem2.4] にある．完全を期するため, 証明を記す．

補助命題 5. $\alpha > 0$, $u \in L(a,b)$ とする．このとき

$$D^\alpha I^\alpha u = u$$

である．

証明．$n = [\alpha] + 1$ とする．D^α, I^α の定義および積分順序の交換から

$$\begin{aligned}
&D^\alpha I^\alpha u\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\times\\
&\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\left(\int_s^x (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds\right)dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\times\\
&\int_0^x \left(\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}u(s)dt\right)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\times\\
&\int_0^x u(s)\left(\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}dt\right)ds
\end{aligned}$$

を得る．また

$$\begin{aligned}&\int_s^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}dt\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n)}(x-s)^{n-1}\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha} I^{\alpha} u \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-s)^{n-1} u(s) ds
\end{aligned}
$$

である．ここで

$$
\begin{aligned}
&\int_0^x \left(\int_0^x \cdots \left(\int_0^x u(t) dt \right) \cdots dt \right) dt \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt
\end{aligned}
$$

である．証明は数学的帰納法によりできる．したがって

$$
D^{\alpha} I^{\alpha} u = u
$$

を得る．□

次は [4] にある．完全を期するために, 証明を記す．[11] も参照せよ．

補助命題 6. $\alpha > 0$ とする．u を $(0,1)$ で連続で積分可能な関数とする, すなわち $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ とする．さらに $D^{\alpha} u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ をみたすとする．$n = [\alpha] + 1$ とする．このとき, ある $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) \\
&= u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

証明．補助命題 4 より

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}(I^{\alpha} D^{\alpha} u - u) &= D^{\alpha} I^{\alpha} D^{\alpha} u - D^{\alpha} u \\
&= D^{\alpha} u - D^{\alpha} u \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である． よって, 補助命題 5 より, ある $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbf{R}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) - u(t) \\
&= C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}
\end{aligned}
$$

である．これより与式を得る．□

[4, Lemma 2.3] に次がある．完全を期するため, 証明を記す．

補助命題 7. $h \in C[0,1]$ かつ $1 < \alpha \le 2$ とする．このとき, 境界値問題

$$
\begin{cases}
D^{\alpha} u(t) + h(t) = 0, \\
u(0) = u(1) = 0
\end{cases}
$$

の一意解は

$$
u(t) = \int_0^1 G_{\alpha}(t,s) h(s) ds
$$

である．ここで

$$
G_{\alpha}(t,s) =
\begin{cases}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le s \le t \le 1), \\
\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \right) \qquad (0 \le t \le s \le 1)
\end{cases}
$$

である．

証明．$D^{\alpha} u(t) = -h(t)$ より

$$
I^{\alpha} D^{\alpha} u(t) = -I^{\alpha} h(t)
$$

である．補助命題 6 より, ある $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds
\end{aligned}
$$

である．このとき

$$
\begin{aligned}
u(t) = &-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&- C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2}
\end{aligned}
$$

である．$u(0) = 0$ より $C_2 = 0$ である．さらに $u(1) = 0$ より

$$
C_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} h(s) ds
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} h(s) ds \\
&= \int_0^1 G_{\alpha}(t,s) h(s) ds
\end{aligned}
$$

を得る．□

補助命題 7 の関数 G_α は次をみたす．[18, Lemma 2.8] を参照せよ．

補助命題 8. 補助命題 7 にある関数 G_α に対して $G_\alpha(t,s) \geq 0$ かつ $G_\alpha(t,s) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ が任意の $t, s \in [0,1]$ に対して成り立つ．

証明． $0 \leq s \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} & G_\alpha(t,s) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right) \\ & \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-ts)^{\alpha-1}\right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

である．また $0 \leq t \leq s \leq 1$ のとき

$$G_\alpha(t,s) \geq 0$$

である．$0 \leq s \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_\alpha(t,s)}{\partial t} \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big((\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-1} \\ & \qquad -(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}\big) \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\big((\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-1} \\ & \qquad -(\alpha-1)(t-ts)^{\alpha-2}\big) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)t^{\alpha-2}\left((1-s)^{\alpha-1} - (1-s)^{\alpha-2}\right) \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

であるから $G_\alpha(t,s)$ は $s \leq t \leq 1$ において単調非増加である．したがって

$$\begin{aligned} G_\alpha(t,s) & \leq G_\alpha(s,s) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

を得る．また $0 \leq t \leq s \leq 1$ において

$$\frac{G_\alpha(t,s)}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-1} \geq 0$$

であるから $G_\alpha(t,s)$ は $0 \leq t \leq s$ において単調非減少である．したがって

$$\begin{aligned} G_\alpha(t,s) & \leq G_\alpha(s,s) \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

を得る．□

[18] の証明方法と定理 1 より次を得る．

定理 9. f を $[0,1] \times [0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への連続で第 2 変数に関して単調非減少な関数とする．$1 < \alpha \leq 2$, $1 < \beta \leq 2$, $2 < \alpha + \beta \leq 4$ とする．ある $\lambda \in [0, \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))$ が存在して，任意の $u, v \in [0,\infty)$ に対して $u \geq v$ ならば，

$$0 \leq f(t,u) - f(t,v) \leq \lambda(u-v)$$

が任意の $t \in [0,1]$ に対して成り立つとする．このとき，境界値問題

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha u(t)) + f(t,u(t)) = 0, \\ u(0) = u(1) = (D^\alpha u)(0) = (D^\alpha u)(1) = 0 \end{cases}$$

の解が一意に存在する．

証明． 境界値問題

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha u(t)) + f(t,u(t)) = 0, \\ u(0) = u(1) = (D^\alpha u)(0) = (D^\alpha u)(1) = 0 \end{cases}$$

の解は

$$\begin{aligned} & u(t) \\ & = \int_0^1 G_\alpha(t,s)\left(\int_0^1 G_\beta(s,r) f(r,u(r))dr\right)ds \end{aligned}$$

であらわされる．実際 $y(t) = D^\alpha u(t)$ とおく．このとき

$$\begin{cases} D^\beta(D^\alpha u(t)) + f(t,u(t)) = 0, \\ (D^\alpha u)(0) = (D^\alpha u)(1) = 0 \end{cases}$$

は

$$\begin{cases} D^\beta y(t) + f(t,u(t)) = 0, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

と同値である．補助命題 7 より，一意解

$$y(t) = -\int_0^1 G_\beta(t,s) f(s,u(s))ds$$

が存在する. すなわち

$$D^{\alpha}u(t)+\int_0^1 G_{\beta}(t,s)f(s,u(s))ds=0$$

である. さらに, 補助命題 7 より,

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t)+\int_0^1 G_{\beta}(t,s)f(s,u(s))ds=0, \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

の一意解

$$\begin{aligned} &u(t) \\ &=\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)f(r,u(r))dr\right)ds \end{aligned}$$

が存在する.

$X=\{u\in C[0,1]\mid u(t)\geq 0\}$ とおく. 任意の $u,v\in X$ に対して $u\leq v$ を

$$u(t)\leq v(t)\ (t\in[0,1])$$

で定める. このとき $(X,\leq)$ は順序集合である. また (X,d) は

$$d(u,v)=\sup_{0\leq t\leq 1}|u(t)-v(t)|$$

で定める距離 d で完備距離空間である. X から X への写像 T を

$$\begin{aligned} &(Tu)(t) \\ &=\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)f(r,u(r))dr\right)ds \end{aligned}$$

で定める. このとき T は X からそれ自身への写像である. $u\geq v$, $t\in[0,1]$ とする. 補助命題 8 より

$$\begin{aligned} &(Tu)(t) \\ &=\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)f(r,u(r))dr\right)ds \\ &\geq\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)f(r,v(r))dr\right)ds \\ &=(Tv)(t) \end{aligned}$$

が任意の $t\in[0,1]$ に対して成り立つ. T は単調非減少である. $u\geq v$ とする. 補助命題 8 より

$$\begin{aligned} &d(Tu,Tv) \\ &=\sup_{0\leq t\leq 1}|Tu(t)-Tv(t)| \\ &=\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\times \\ &\quad\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)(f(r,u(r))-f(r,v(r)))dr\right)ds \\ &\leq\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\times \\ &\quad\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)\lambda(u(r)-v(r))dr\right)ds \\ &\leq\lambda d(u,v)\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\times \\ &\quad\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,r)dr\right)ds \\ &\leq\lambda d(u,v)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G_{\beta}(t,s)ds \\ &\leq\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}d(u,v) \end{aligned}$$

である. したがって

$$d(Tu,Tv)\leq\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}d(u,v)$$

である. ここで $\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}<1$ である. また $T0\geq 0$ である. このとき, 定理 1 より解が一意に存在する. □

第 4 節　おわりに

定理 1 が縮小写像に関連する結果であるのに対して, Kannan 写像に関する結果も得られている. [24] を参照されたい.

弘前大学で行われた「The eighth international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013)」において, 渡辺が講演発表を行った. タイトルは「Kannan mappings in partially ordered sets with metric」である.

2014 年度日本数学会年会 (学習院大学, 2014 年 3 月 15 日から 18 日まで) において, 渡辺が講演発表を行った. タイトルは「Fixed point theorem for set-valued Kannan mappings with a vector-valued distance」である. こちらの内容は現在投稿中である.

台湾の台北で行われた ICM2014 のサテライト国際会議「The Fourth Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (NAOAsia2014)」(國立台湾師範大学, National Taiwan Normal University, 2014 年 8 月 5 日から 9 日まで) において, 豊田が講演発表を行った. タイトルは「Application of a fixed point theorem in partial ordered sets to boundary value problems for 3.5 order differential equations」である. 適用例その 1 の内容と, 適用例その 2 の微分方程式で境界条件 $u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$ の場合の境界値問題の結果を発表した.

境界条件は $u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$ ばかりでなく, $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$ の場合も得られており, 現在論文として投稿中である. 境界条件 $u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0$ の場合については, [3] と [14] を参照されたい.

2014 年日本数学会秋季総合分科会 (広島大学, 2014 年 9 月 25 日から 9 月 28 日) において、渡辺が講演発表を行った. タイトルは「順序集合における拡張された縮小写像タイプの不動点定理について」である. いわゆる Weissinger タイプである.

最後に, 今後の課題について述べる. 1 つめの課題は, [9] と [24] の結果の比較である. [9] において, 次の定理が示されている.

定理 10. $(X, \leq)$ を半順序集合とする. 距離 d が存在して (X, d) は完備距離空間とする. X の任意の単調非減少な点列 $\{x_n\}$ に対して, ある部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在して, 任意の k に対して $x_{n_k} \leq x$ が成り立つとする. T を X から X への写像で単調非減少とする. $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ へのある単調非減少な関数 ψ で, 任意の $t > 0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$$

をみたすものが存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \geq y$ ならば

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y))$$

をみたすとする. ここで

$$\begin{aligned} &M(x, y) \\ &= \max\left\{d(x, y), \frac{1}{2}(d(x, Tx) + d(y, Ty)),\right. \\ &\qquad \left.\frac{1}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx))\right\} \end{aligned}$$

である. また, ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ. 任意の $x, y \in X$ に対して, ある $z \in X$ が存在して, $x \leq z$ かつ $y \leq z$ をみたすならば, 不動点は一意である.

この定理において, $\psi(t) = kt$ $(0 < k < 1)$ とすれば

$$\begin{aligned} &\psi(M(x, y)) \\ &= \max\left\{kd(x, y), \frac{k}{2}(d(x, Tx) + d(y, Ty)),\right. \\ &\qquad \left.\frac{k}{2}(d(x, Ty) + d(y, Tx))\right\} \end{aligned}$$

であり, $t > 0$ に対して, $0 < k < 1$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n t < \infty$$

である. [9] と [24] の定理では, 一意性を示すのに必要な条件が異なっており, 両者の比較検討が必要である.

2 つめの課題は, [24] に続く研究である. [12] において, 次の定理が示されている.

定理 11. X を完備距離空間とする. T を X からそれ自身への写像で, ある $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $\varphi(\alpha) d(x, Tx) \leq d(x, y)$ ならば

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(y, Ty)$$

をみたすとする. ここで

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \alpha < \sqrt{2} - 1) \\ 1 - \alpha & (\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < \frac{1}{2}) \end{cases}$$

である. このとき, T はただひとつの不動点をもつ.

順序を仮定した距離空間におけるこの定理の写像に対して, やはり不動点定理を得られるのかどうかは残された課題である. もし得られれば, [24] の定理の拡張になるであろう.

3 つめの課題は, 適用例その 2 の微分方程式で境界条件 (IV) $u''(0) = u''(1) = u'''(0) = u'''(1) = 0$, (V) $u(0) = u'(0) = 0$, $u''(1) = 0$, $u'''(1) = Cu(1)$ (ここで C は定数), (VI) $u''(0) = C_1u'(0)$, $u'''(0) = C_2u(0)$, $u''(1) = C_3u'(1)$, $u'''(1) = C_4u(1)$ (C_1, C_2, C_3, C_4 は定数) の場合を示すことである. 現在, (I) $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$, (II) $u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0$ および (III) $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0$ の場合は解明されている. [6] の 21 課や [20], [13] も参照したい.

4 つめの課題は, 特異性をもつ場合の初期値問題の解の存在と一意性を示すことである. [5] において, 特異性をもつ微分方程式 $u'' = f(t, u)$ の境界値問題が考察されている. 一方, 著者のうち豊田は, 川　敏治氏 (玉川大学工学部) と共に特異性をもつ 2 階微分方程式の初期値問題を考察した ([10]). この論文で扱っている初期条件 $u(0) = 0$, $u'(0) = \lambda$ ($\lambda > 0$) の場合はどうなるであろうか. 写像 $Au(t) = \lambda t + \int_0^t (t-s)f(s, u(s))ds$ で考えればよいだろうが, 詳しい研究は今後の課題である. [15] も参照したい.

参考文献

[1] A. R. Aftabizadeh, *Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **116** (1986), 415–426.

[2] R. P. Agarwal, *On fourth-order boundary value problems arising in beam analysis*, Differential Integral Equations, 26 (1989), 91–110.

[3] C. Bai, *Triple positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 24 (2008), 1–10.

[4] Z. Bai and H. Lü, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **311** (2005), 495–505.

[5] J. Caballero, J. Harjani and K. Sadarangani, *Positive solutions for a class of singular fractional boundary value problems*, Computers and Mathematics with Applications, **62** (2011), 1325–1332.

[6] S. J. Farlow, 伊理正夫 (翻訳), 伊理由美 (翻訳), 偏微分方程式–科学者・技術者のための使い方と解き方, 朝倉書店, 1996.

[7] C. P. Gupta, *Existence and uniqueness theorem for a bending of an elastic beam equation*, Applicable Analysis. An International Journal, **26** (1988), 289–304.

[8] J. Harjani and K. Sadarangani, *Existence and uniqueness of positive solutions for a nonlinear fourth-order boundary value problem*, Positivity, **14** (2010), 849–858.

[9] E. Karapinar and B. Samet, *Generalized α-ϕ contractive type mappings and related fixed point theorems with applications*, Abstract and Applied Analysis, **2012** (2012), Article ID 793486, 17pages.

[10] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Existence of positive solution for the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, Nonlinear Mathematics for Uncertainly and its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, **100**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2011, 435–441.

[11] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, In North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[12] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Some similarity between contractions and Kannan mappings*, Fixed Point Theory and Applications,, **2008** (2008), Ariticle ID 649749, 8pages.

[13] 近藤次郎, 改訂工科の数学 3 微分方程式フーリエ解析, 培風館, 1981.

[14] S. Liang and J. Zhang, *Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation*, Nonlinear Analysis, **71** (2009), 5545–5550.

[15] Y. Liu, *Exisntence and uniquness of solutions for a class of initial value problems of fractional differential systems on half lines*, Bulletin des Sciences Mathématiques, **137** (2013), 1048–1071.

[16] R. Ma, *Existence of positive solutions of a fourth order boundary value problem*, Applied Mathematics and Computation, **168** (2005), 1219–1231.

[17] J J. Nieto and R. R. López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, **22**(2005), 223–239.

[18] N. Nyamoradi and M. Javidi, Existence of multiple positive solutions for fractional differential inclusions with m-point boundary conditions and two fractional orders, Electronical Journal of Differential Equations, **187** (2012), 1–26.

[19] A. C. M. Ran and M. C. B. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, **132** (2003) 1435–1443.

[20] 斎藤秀雄, 工業基礎振動学, 養賢堂, 1977.

[21] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers,Switzerland, 1993.

[22] 豊田昌史, 渡辺俊一, 4 階微分方程式境界値問題への半順序集合における不動点定理の適用, 玉川大学工学部紀要, **48** (2013), 31–36.

[23] Masashi Toyoda and Toshikazu Watanabe, *Application of a fixed point theorem in partially ordered sets to boundary value problems for fourth order differential equations*, to appear in Proceedings of the 8th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis.

[24] Masashi Toyoda and Toshikazu Watanabe, *Kannan mapping theorems in partially ordered sets*, 京都大学数理解析研究所講究録, **1923** (2014), 99–104.

[25] 豊田昌史, 渡辺俊一, 3.5 階微分方程式境界値問題への半順序集合における不動点定理の適用, 玉川大学工学部紀要, **49** (2014), 11–16.

[26] M. Turinici, *Abstract comparison principles and multivariable Gronwall-Bellman inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **117** (1986), 100–127.

[27] R. A. Usmani, *A uniqueness theorem for a boundary value problems*, Proceedings of the American Mathematical Society, **77** (1979), 329–335.

[28] Y. Yang, *Fourth-order two-point boundary value problems*, Proceedings of the American Mathematical Society, **104** (1988), 175–180.

[29] X. Xu, D. Jiang and C. Yuan, *Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation*, Nonlinear Analysis, **71** (2009), 4676–4688.

2015 年 3 月 13 日原稿受付
Received, March 13, 2015