有界連続写像全体からなる空間における不動点定理とそのニューロンモデルに関係する微分方程式への適用例

Fixed point theorem in the space of all bounded continuous mappings and its applied example to differential equations related with a neuron model

川崎敏治 ‡　佐々木寛 *　豊田昌史 ‡

Toshiharu Kawasaki　Hiroshi Sasaki　Masashi Toyoda

‡ 玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, * 玉川大学工学部ソフトウエアサイエンス学科,
194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
College of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

In this paper, we show a fixed point theorem in the space of all bounded continuous mappings. Moreover we consider the existence of a unique solution for fractional differential equations with multiple delays. Using the existence theorem, we discuss a fractional chaos neuron model.

Keywords: Fixed point theorem, fractional differential equation, neuron model.

第 1 節　はじめに

生物の神経系による情報処理のしくみを工学的に応用することを目的として，また神経系の情報処理メカニズムの解明を目的として，神経系の基本単位と考えられているニューロンのモデルが提案されている．その一つに [9] によって提案されている周期型フラクショナルカオスニューロンモデル

$$D^{\alpha}u(t) = -\beta u(t) + \sin\left(\frac{\pi u(t-\tau)}{2T_0}\right)$$

がある．ここで D^{α} は非整数階の微分演算子, $u(t)$ は時刻 t での内部状態, β は散逸定数, τ は遅延時間, T_0 は活性化関数である正弦関数の周期パラメータである．[5] も参照されたい．

本論文では, [9] によって提案された周期型フラクショナルカオスニューロンモデルの解の存在と一意性を扱う．[9] において, 非整数階微分演算子 D^{α} は Grünwald-Letnikv の定義によるものが用いられている．本論文では, Caputo による微分の定義を用いる．すなわち, 遅れつきの非整数階微分方程式に関する問題

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}u(t) = -\beta u(t) + \sin\dfrac{\pi u(t-\tau)}{2T_0} & \\ & (t \in [0,T]), \\ u(t) = \phi(t) & (t \in [-\tau_0, 0]), \end{cases}$$

の解の存在と一意性を, 第 3 節 で示す．ここで, $\alpha \in (0,1]$, $\beta, \tau \in [0,\infty)$, $T_0, \tau_0 \in (0,\infty)$, $\phi \in C((-\infty,0],\mathbf{R})$ である．そのため，第 2 節で, ある有界連続写像全体からなる不動点定理を紹介する．第 4 節では, [8] および [3] の不動点定理を系とするように, 第 2 節の定理を拡張する．

第 2 節　不動点定理

I を区間とする．有限区間でも無限区間でもよい．$BC(I,\mathbf{R})$ は, その要素 u のノルムを

$$\|u\| = \sup_{t\in I} |u(t)|$$

で定めた I 上の有界連続写像全体からなる Banach 空間とする．J を $I \subset J$ をみたす区間と

する．F を $BC(I,\mathbf{R})$ の閉集合とする．ϕ を $J\setminus I$ から E への写像とする．$u\in F$ に対して u_ϕ を

$$u_\phi=\begin{cases} u & (I\ 上), \\ \phi & (J\setminus I\ 上) \end{cases}$$

で定める．

定理 1. $I=[a,b]$ とし，J を $I\subset J$ をみたす区間とする．F を $BC(I,\mathbf{R})$ の空でない閉集合とする．ある $J\setminus I$ から $\mathbf{R}$ への写像 ϕ が存在して，任意の $u\in F$ に対して $u_\phi\in BC(J,\mathbf{R})$ をみたすとする．A を F からそれ自身への写像とし，ある第 2 変数に関して積分可能な $I\times I$ から $[0,\infty)$ への関数 G が存在して，ある $\eta_1,\eta_2\in C(I,J)$ が存在して，(H_1), (H_2) をみたすとする．
(H_1) 任意の $u,v\in F$, $t\in I$ に対して

$$\begin{aligned}&|Au(t)-Av(t)|\\ &\le\int_a^t G(t,s)\left(|u_\phi(\eta_1(s))-v_\phi(\eta_1(s))|\right.\\ &\quad\left.+|u_\phi(\eta_2(s))-v_\phi(\eta_2(s))|\right)ds\end{aligned}$$

が成り立つ．
(H_2) ある $\alpha\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ が存在し，および任意の $t\in I$ に対して

$$\int_a^t G(t,s)y(s)ds\le\alpha y(t)$$

をみたすようなある $y\in BC(J,(0,\infty))$ が存在して，任意の $t\in I$ に対して

$$y(\eta_1(t))\le y(t),\quad y(\eta_2(t))\le y(t)$$

が成り立つ．
このとき A はただひとつの不動点をもつ．

証明． 条件 (H_2) をみたす $y\in BC(J,(0,\infty))$ に対して，ある $m,M>0$ が存在して，任意の $t\in J$ に対して $m\le y(t)\le M$ である．$BC(I,\mathbf{R})$ のノルム $\|\cdot\|_y$ を

$$\|u\|_y=\sup_{t\in I}\left\{\frac{1}{y(t)}|u(t)|\right\}$$

で定める．このとき

$$\frac{1}{M}\|u\|\le\|u\|_y\le\frac{1}{m}\|u\|$$

であるから，$\|\cdot\|_y$ はノルム $\|\cdot\|$ と同値である．F の距離 d を

$$d(u,v)=\sup_{t\in J}\left\{\frac{1}{y(t)}|u_\phi(t)-v_\phi(t)|\right\}$$

で定める．$d(u,v)=\|u-v\|_y$ および $\|\cdot\|_y$ は完備距離空間を導くノルム $\|\cdot\|$ と同値であるから，(F,d) は完備距離空間である．(H_1) より，任意の $u,v\in F$, $t\in I$ に対して

$$\begin{aligned}&\frac{1}{y(t)}|Au(t)-Av(t)|\\ &\le\frac{\beta}{y(t)}|u(t)-v(t)|\\ &\quad+\frac{1}{y(t)}\int_a^t G(t,s)\left(|u_\phi(\eta_1(s))-v_\phi(\eta_1(s))|\right.\\ &\quad\left.+|u_\phi(\eta_2(s))-v_\phi(\eta_2(s))|\right)ds\\ &\le\frac{1}{y(t)}\int_a^t G(t,s)\left(d(u,v)y(\eta_1(s))\right.\\ &\quad\left.+d(u,v)y(\eta_2(s))\right)ds\\ &\le\frac{1}{y(t)}\int_a^t G(t,s)\left(d(u,v)y(s)\right.\\ &\quad\left.+d(u,v)y(s)\right)ds\\ &=\frac{2d(u,v)}{y(t)}\int_a^t G(t,s)y(s)ds\\ &\le\frac{2d(u,v)}{y(t)}\alpha y(t)\\ &=2\alpha d(u,v)\end{aligned}$$

を得る．よって

$$d(Au,Av)\le 2\alpha d(u,v)$$

である．すなわち，A は縮小写像である．縮小写像の不動点定理から，A は不動点をただひとつもつ．□

第 3 節　周期型フラクショナルカオスニューロンモデルへの適用

α を正の実数とする．関数 u の α 階 Caputo 微分 (または Caputo-Riesz 微分) ${}^cD^\alpha$ を

$$\begin{aligned}&{}^cD^\alpha u(t)\\ &=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\cdot\frac{d^n}{ds^n}u(s)ds\end{aligned}$$

で定める．ここで Γ は Gamma 関数である．すなわち $\alpha > 0$ に対して

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

である．また, $n = [\alpha] + 1$ であり, $[\alpha]$ は α を超えない最大の自然数である．すなわち, n は $n - 1 \leq \alpha < n$ をみたす自然数である．非整数階微分に関して, 詳しくは [2, 4] を見られたい．

定理 2. $\alpha \in (0, 1]$, $\tau \in C([0, T], [0, \infty))$, $\phi \in C((-\infty, 0], \mathbf{R})$ とする．$f \in C([0, T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ とし, 次の (H_f) をみたすとする．
(H_f) ある $L_0, L_1 \in [0, \infty)$ が存在して, 任意の $t \in [0, T]$, $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &|f(t, x_0, x_1) - f(t, y_0, y_1)| \\ &\leq L_0|x_0 - y_0| + L_1|x_1 - y_1| \end{aligned}$$

が成り立つ．
このとき, 遅れつきの非整数階微分方程式に関する問題

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f(t, u(t), u(t - \tau(t))) & \\ & (t \in [0, T]), \\ u(t) = \phi(t) & (t \in [-\tau_0, 0]), \end{cases}$$

はただひとつの解をもつ． ここで $-\tau_0 = \min\{t - \tau(t) \mid t \in I\}$ である．

証明. $I = [0, T]$, $J = [-\tau_0, T]$ とする．すなわち $J \setminus I = [-\tau_0, 0]$ である．また $F = \{u|_I \mid u \in C(J, \mathbf{R}), u(t) = \phi(t)\ (t \in J \setminus I)\}$ とおく．このとき, 任意の $u \in F$ に対して $u_\phi \in BC(J, \mathbf{R})$ をみたす．これより

$$\begin{aligned} &u(t) = \phi(0) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, u(s), u_\phi(s - \tau(s))) ds \end{aligned}$$

をみたす $u \in C(I, \mathbf{R})$ がただひとつ存在することをいう．F 上の写像 A を

$$\begin{aligned} &Au(t) = \phi(0) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s, u(s), u_\phi(s - \tau(s))) ds \end{aligned}$$

で定める．このとき, 任意の $u \in F$ に対して $Au \in F$ である．実際, $Au(t)$ を I に制限した関数は連続関数であり, また, $Au(0) = \phi(0)$ であるから $J \setminus I = [-\tau_0, 0]$ 上の関数 ϕ と $t = 0$ での値は一致する．また

$$\begin{aligned} &|Au(t) - Av(t)| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \left(L_0|u_\phi(s) - v_\phi(s)| \right. \\ &\quad \left. + L_1|u_\phi(s - \tau(s)) - v_\phi(s - \tau(s))| \right) ds \\ &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \left(|u_\phi(s) - v_\phi(s)| \right. \\ &\quad \left. + |u_\phi(s - \tau(s)) - v_\phi(s - \tau(s))| \right) ds \end{aligned}$$

である．ここで $L = \max\{L_0, L_1\}$ である．関数 G を

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{L}{\Gamma(\alpha)}(t - s)^{\alpha-1} & (0 \leq s < t), \\ 0 & (t \leq s) \end{cases}$$

とおく．$\eta_1(s) = s$, $\eta_2(s) = s - \tau(s)$ とするとき, 定理 1 の (H_1) が成り立つ．また, α として $0 < 2\alpha_0 < 1$ をみたすような α_0 をとり, c として $c^\alpha \geq \frac{L}{\alpha_0}$ をとる．さらに $y(t) = e^{ct}$ とする．このとき

$$\begin{aligned} \int_0^t G(t, s) y(s) ds &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} e^{cs} ds \\ &= \frac{Le^{ct}}{c^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{ct} s^{\alpha-1} e^{-s} ds \\ &\leq \frac{L}{c^\alpha} e^{ct} \\ &\leq \alpha_0 y(t) \end{aligned}$$

より, 条件 (H_2) をみたす．ここで 2 つめの等号は $t - s = \dfrac{1}{c} z$ で置換積分した．すなわち $ds = -\dfrac{1}{c} dz$ であり s が $0 \to t$ のとき z は $ct \to 0$ であるから

$$\begin{aligned} &\frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} e^{cs} ds \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_{ct}^0 \left(\frac{1}{c} z \right)^{\alpha-1} e^{ct-z} \left(-\frac{1}{c} \right) dz \\ &= \frac{Le^{ct}}{c^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{ct} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \end{aligned}$$

である．定理 1 から A はただひとつの不動点をもつ．□

定理 2 より，カオスニューロンフラクショナルモデル [9] の解の存在と一意性を示す．$\alpha \in (0,1]$, $\beta, \tau \in [0,\infty)$, $T_0 \in (0,\infty)$ および $\phi \in C((-\infty,0],\mathbf{R})$ とする．遅れつきの非整数階微分方程式の問題

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = -\beta u(t) + \sin\dfrac{\pi u(t-\tau)}{2T_0} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t \in [0,T]), \\ u(t) = \phi(t) \qquad\qquad\quad (t \in (-\tau_0, 0]), \end{cases}$$

を考える．ここで $-\tau_0 = \min\{t-\tau(t) \mid t \in I\}$ である．$f(t,x_0,x_1) = -\beta x_0 + \sin\frac{\pi x_1}{2T_0}$ とおくと

$$\begin{aligned} &|f(t,x_0,x_1) - f(t,y_0,y_1)| \\ &\le |\beta||x_0-y_0| + \left|\sin\frac{\pi x_1}{2T_0} - \sin\frac{\pi y_1}{2T_0}\right| \\ &\le |\beta||x_0-y_0| + \frac{\pi}{2T_0}|x_1-y_1|, \end{aligned}$$

であるから，f は (H_f) を $L_0 = |\beta|$ および $L_1 = \frac{\pi}{2T_0}$ に対してみたす．したがって，定理 2 よりただひとつの解をもつ．

第 4 節　不動点定理の拡張

定理 1 のように，積分不等式を条件式として含む不動点定理に [8] や [3] がある．本節では，これらを系とするように，定理 1 を拡張する．

I を区間とする．有限区間でも無限区間でもよい．E を Banach 空間とする．$BC(I,E)$ は，その要素 u のノルムを

$$\|u\| = \sup_{t\in I}\|u(t)\|_E$$

で定めた I 上の有界連続写像全体からなる Banach 空間とする．J を $I \subset J$ をみたす区間とする．F を $BC(I,E)$ の閉集合とする．ϕ を $J \setminus I$ から E への写像とし $u \in F$ に対して u_ϕ を

$$u_\phi = \begin{cases} u & (I \text{ 上}), \\ \phi & (J \setminus I \text{ 上}) \end{cases}$$

で定める．

次を得る．

定理 3. *I を区間とする．J_0, J を $I \subset J_0 \subset J$ をみたす区間とする．E を Banach 空間とする．F を $BC(I,E)$ の空でない閉集合とする．$J \setminus I$ から E へのある関数 ϕ が存在して，任意の $u \in F$ に対して $u_\phi \in BC(J,E)$ をみたすとする．A を F からそれ自身への写像とする．ある　$\beta \in [0,1)$ が存在し，ある $I \times J_0$ から $[0,\infty)$ への第 2 変数に関して積分可能なある関数 G が存在し，ある I から J_0 への関数 γ, δ で $\gamma \le \delta$ をみたすものが存在し，ある $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \in C(J_0, J)$ が存在して，(H_1), (H_2) をみたすとする．*

(H_1) 任意の $u, v \in F$, $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned} &\|Au(t) - Av(t)\|_E \le \beta\|u(t)-v(t)\|_E \\ &+ \int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)\sum_{i=1}^n \|u_\phi(\eta_i(s)) - v_\phi(\eta_i(s))\|_E ds \end{aligned}$$

をみたす．

(H_2) ある $\beta + nK\alpha \in [0,1)$ をみたす $\alpha \in [0,\infty)$, $K \in [0,\infty)$ が存在し，さらに，任意の $t \in I$ に対して $\displaystyle\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds \le \alpha y(t)$ をみたす $y \in BC(J,(0,\infty))$ が存在して，任意の $t \in J_0$ に対して

$$y(\eta_i(t)) \le Ky(t) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

をみたす．

このとき，A はただひとつの不動点をもつ．

証明．条件 (H_2) の $y \in BC(J,(0,\infty))$ に対して，ある $m, M \in (0,\infty)$ が存在して，任意の $t \in J$ に対して $m \le y(t) \le M$ をみたす．$BC(I,E)$ のノルム $\|\cdot\|_y$ を

$$\|u\|_y = \sup_{t\in I}\left\{\frac{1}{y(t)}\|u(t)\|_E\right\}$$

で定める．このとき

$$\frac{1}{M}\|u\| \le \|u\|_y \le \frac{1}{m}\|u\|$$

であるから，$\|\cdot\|_y$ は $\|\cdot\|$ と同値である．F の距離 d を

$$d(u,v) = \sup_{t\in J}\left\{\frac{1}{y(t)}\|u_\phi(t) - v_\phi(t)\|_E\right\}$$

で定める．このとき $d(u,v) = \|u-v\|_y$ および $\|\cdot\|_y$ は完備距離空間を導くノルム $\|\cdot\|$ と同値であるから，(F,d) は完備距離空間である．また条件 (H_1) より，任意の $u, v \in F$, $t \in I$ に対して

$$\frac{1}{y(t)}\|Au(t) - Av(t)\|_E$$

$$\le \frac{\beta}{y(t)}\|u(t)-v(t)\|_E$$
$$+\frac{1}{y(t)}\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)\times$$
$$\sum_{i=1}^{n}\|u_\phi(\eta_i(s))-v_\phi(\eta_i(s))\|_E ds$$
$$\le \beta d(u,v)+\frac{1}{y(t)}\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)\times$$
$$\sum_{i=1}^{n} d(u,v)y(\eta_i(s))ds$$
$$\le \beta d(u,v)+\frac{d(u,v)}{y(t)}\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)\sum_{i=1}^{n} Ky(s)ds$$
$$=\beta d(u,v)+\frac{nKd(u,v)}{y(t)}\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds$$
$$\le (\beta+nK\alpha)d(u,v)$$

が任意の $u,v\in F$, $t\in I$ に対して成り立つ．したがって

$$d(Au,Av)\le(\beta+nK\alpha)d(u,v)$$

を得る．縮小写像の不動点定理より, A はただひとつの不動点をもつ．□

定理 3 より, 次の不動点定理 [8] を得る．

系 4 (Lou の不動点定理). $I=[0,T]$ とする．E を *Banach* 空間とする．F を I から E への連続写像全体からなる *Banach* 空間 $C(I,E)$ の空でない閉集合とする．A を F からそれ自身への写像とする．ある $\alpha,\beta\in[0,1)$, $K\in[0,\infty)$ が存在して, 任意の $u,v\in F$, $t\in(0,T]$ に対して

$$\|Au(t)-Av(t)\|_E$$
$$\le \beta\|u(t)-v(t)\|_E+\frac{K}{t^\alpha}\int_0^t\|u(s)-v(s)\|_E ds$$

をみたす．このとき, A はただひとつの不動点をもつ．

証明. $J_0=J=[0,T]$ とおく．いま, ある $\alpha,\beta\in[0,1)$, $K\in[0,\infty)$ が存在して, 任意の $u,v\in F$, $t\in(0,T]$ に対して

$$\|Au(t)-Av(t)\|_E$$
$$\le \beta\|u(t)-v(t)\|_E+\frac{K}{t^\alpha}\int_0^t\|u(s)-v(s)\|_E ds$$

をみたす．l'Hopital の定理より, 任意の $u,v\in F$ に対して

$$\|Au(0)-Av(0)\|_E$$
$$\le \beta\|u(0)-v(0)\|_E+$$
$$\lim_{t\to+0}\frac{K}{t^\alpha}\int_0^t\|u(s)-v(s)\|_E ds$$
$$=\beta\|u(0)-v(0)\|_E+$$
$$\lim_{t\to+0}\frac{K}{\alpha t^{\alpha-1}}\|u(t)-v(t)\|_E$$
$$=\beta\|u(0)-v(0)\|_E$$

をみたす．関数 G を

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{K}{t^\alpha} & (0<t\le T),\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

とおく．また $\gamma(t)=0$, $\delta(t)=t$, $n=1$ および $\eta_1(t)=t$ とする．このとき, 任意の $u,v\in F$, $t\in I$ に対して

$$\|Au(t)-Av(t)\|_E$$
$$\le\begin{cases}\beta\|u(t)-v(t)\|_E \\ \qquad +\dfrac{K}{t^\alpha}\displaystyle\int_0^t\|u(s)-v(s)\|_E ds & \\ & (0<t\le T),\\ \beta\|u(0)-v(0)\|_E & (t=0)\end{cases}$$
$$=\beta\|u(t)-v(t)\|_E$$
$$+\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)\sum_{i=1}^{n}\|u(\eta_i(s))-v(\eta_i(s))\|_E ds$$

をみたす．すなわち (H_1) をみたす．$\tau\in(0,\infty)$ を $K\tau^{1-\alpha}<1-\beta$ をみたすものとする．$\alpha_0=K\tau^{1-\alpha}$ を条件 (H_2) の α とし $K_0=1$ を条件 (H_2) の K とする．また

$$y(t)=\begin{cases}1 & (0\le t\le\tau),\\ e^{\frac{t}{\tau}-1} & (\tau\le t\le T)\end{cases}$$

とする．このとき $0\le t\le\tau$ ならば

$$\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds$$
$$=\int_0^t\frac{K}{t^\alpha}ds$$
$$=\frac{K}{t^\alpha}\int_0^t ds$$
$$=Kt^{1-\alpha}$$
$$\le\alpha_0 y(t)$$

である. $\tau \le t \le T$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds \\
&= \int_0^{\tau} \frac{K}{t^\alpha} ds + \int_{\tau}^{t} \frac{K}{t^\alpha} e^{\frac{s}{\tau}-1} ds \\
&= \frac{K}{t^\alpha}\tau + \frac{K}{t^\alpha}\tau \left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1\right) \\
&= \frac{K\tau}{t^\alpha} e^{\frac{t}{\tau}-1} \\
&\le K\tau^{1-\alpha} e^{\frac{t}{\tau}-1} \\
&= \alpha_0 y(t)
\end{aligned}$$

である. よって, 条件 (H_2) をみたす. したがって, 定理 3 より A はただひとつの不動点をもつ. □

定理 3 より, 次の不動点定理 [3] を得る.

系 5 (de Pascale-de Pascale の不動点定理). $I = [1, \infty)$ とする. E を *Banach* 空間とする. F を $BC(I, E)$ の空でない閉集合とする. A を F からそれ自身への写像とする. ある $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in [0, 1)$ および $K \in [0, \infty)$ が存在して, 任意の $u, v \in F$, $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|Au(t) - Av(t)\|_E \\
&\le \beta\|u(t) - v(t)\|_E + \frac{K}{t^\alpha}\int_1^t \|u(s) - v(s)\|_E ds
\end{aligned}$$

をみたす. このとき, A はただひとつの不動点をもつ.

証明. $I = J_0 = J = [1, \infty)$ とおく. いま, ある $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in [0, 1)$ および $K \in [0, \infty)$ が存在して, 任意の $u, v \in F$, $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|Au(t) - Av(t)\|_E \\
&\le \beta\|u(t) - v(t)\|_E + \frac{K}{t^\alpha}\int_1^t \|u(s) - v(s)\|_E ds
\end{aligned}$$

をみたす. 関数 G を

$$G(t,s) = \frac{K}{t^\alpha}$$

とおく. $\gamma(t) = 1$, $\delta(t) = t$, $n = 1$ および $\eta_1(t) = t$ とおく. このとき, 任意の $u, v \in F$, $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{t^\alpha}\int_1^t \|u(s) - v(s)\|_E ds \\
&= \int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s) \sum_{i=1}^{n} \|u(\eta_i(s)) - v(\eta_i(s))\|_E ds
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\|Au(t) - Av(t)\|_E \\
&\le \beta\|u(t) - v(t)\|_E + \frac{K}{t^\alpha}\int_1^t \|u(s) - v(s)\|_E ds \\
&= \beta\|u(t) - v(t)\|_E + \int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s) \times \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} \|u(\eta_i(s)) - v(\eta_i(s))\|_E ds
\end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, 条件 (H_1) をみたす. $c \in (0, \infty)$ および $\tau \in (1, \infty)$ を

$$K(c^{-1} + \tau^{1-\alpha}) < 1 - \beta$$

をみたすものとする. 条件 (H_2) の α を

$$\alpha_0 = K(c^{-1} + \tau^{1-\alpha})$$

で, 条件 (H_2) の K を

$$K_0 = 1$$

とする. また

$$y(t) = \begin{cases} e^{ct} & (1 \le t \le \tau), \\ e^{c\tau} & (\tau \le t) \end{cases}$$

とする. このとき $1 \le t \le \tau$ ならば

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds \\
&= \int_1^t \frac{K}{t^\alpha} e^{cs} ds \\
&= \frac{K}{ct^\alpha}(e^{ct} - e^c) \\
&\le Kc^{-1}e^{ct} \\
&\le Kc^{-1}e^{ct} + K\tau^{1-\alpha}e^{ct} \\
&= K(c^{-1} + \tau^{1-\alpha})e^{ct} \\
&= \alpha_0 y(t)
\end{aligned}$$

である. また $1 \le \tau \le t$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds \\
&= \int_1^{\tau} \frac{K}{t^{\alpha}} e^{cs} ds + \int_{\tau}^{t} \frac{K}{t^{\alpha}} e^{c\tau} ds \\
&= \frac{K}{ct^{\alpha}}(e^{c\tau} - e^{c}) + \frac{Ke^{c\tau}}{t^{\alpha}}(t-\tau) \\
&\le \frac{K}{ct^{\alpha}} e^{c\tau} + \frac{Ke^{c\tau}}{t^{\alpha}} t \\
&= \frac{K}{ct^{\alpha}} e^{c\tau} + Ke^{c\tau} t^{1-\alpha} \\
&\le \frac{K}{c} e^{c\tau} + Ke^{c\tau} \tau^{1-\alpha} \\
&= K(c^{-1} + \tau^{1-\alpha}) e^{c\tau} \\
&= \alpha_0 y(t)
\end{aligned}$$

である. よって, 条件 (H_2) をみたす. したがって, 定理 3 より A はただひとつの不動点をもつ. □

定理 3 を使うと, 定理 2 は次のように拡張できる.

定理 6. $\alpha \in (0,1]$ とする. $\phi \in C((-\infty,0],E)$ とする. $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m \in C([0,T],[0,\infty))$ とする. E を *Banach* 空間とする. $f \in C([0,T] \times E^{m+1}, E)$ が, 任意の $t \in [0,T]$, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m \in E$ に対して, (H_f) をみたすとする.
(H_f) ある $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_m \in [0,\infty)$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\|f(t,x_0,x_1,\ldots,x_m) - f(t,y_0,y_1,\ldots,y_m)\|_E \\
&\le \sum_{i=0}^{m} L_i \|x_i - y_i\|_E
\end{aligned}$$

をみたす.
このとき, 遅れつきの非整数階微分方程式に関する問題

$$\begin{cases}
{}^{c}D^{\alpha}u(t) \\
\qquad = f(t,u(t),u(t-\tau_1(t)),\ldots,u(t-\tau_m(t))) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (t \in [0,T]), \\
u(t) = \phi(t) \qquad\qquad (t \in [-\tau_0, 0])
\end{cases}$$

はただひとつの解をもつ. ここで

$$-\tau_0 = \min\{t - \tau_i(t) \mid t \in I, i = 1,\ldots,m\}$$

である.

証明. $I = J_0 = [0,T]$, $J = [-\tau_0, T]$ および $F = \{u|_I \mid u \in C(J,E),\ u(t) = \phi(t)\ (t \in J \setminus I)\}$ とおく. このとき, 任意の $u \in F$ に対して $u_{\phi} \in BC(J,E)$ をみたす. 積分方程式

$$\begin{aligned}
&u(t) = \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times \\
&\quad f(s,u(s),u_{\phi}(s-\tau_1(s)),\ldots,u_{\phi}(s-\tau_m(s)))ds
\end{aligned}$$

をみたす $u \in C(I,E)$ がただひとつ存在することを示す. F 上の写像 A を

$$\begin{aligned}
&Au(t) = \phi(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times \\
&\quad f(s,u(s),u_{\phi}(s-\tau_1(s)),\ldots,u_{\phi}(s-\tau_m(s)))ds
\end{aligned}$$

で定める. このとき, 任意の $u \in F$ に対して $Au \in F$ である. さらに

$$\begin{aligned}
&\|Au(t) - Av(t)\|_E \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times \\
&\quad \sum_{i=0}^{m} L_i \|u_{\phi}(s-\tau_i(s)) - v_{\phi}(s-\tau_i(s))\|_E \\
&\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times \\
&\quad \sum_{i=0}^{m} \|u_{\phi}(\eta_i(s)) - v_{\phi}(\eta_i(s))\|_E ds
\end{aligned}$$

である. ここで $\tau_0(t) = 0$, $L = \max\{L_0, L_1, \ldots, L_m\}$ および $\eta_i(t) = t - \tau_i(t)$ $(i = 0,\ldots,m)$ である. $\beta = 0$ とおき

$$G(t,s) = \begin{cases}
\dfrac{L}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1} & (0 \le s < t), \\
0 & (t \le s)
\end{cases}$$

$\gamma(t) = 0$, $\delta(t) = t$ および $n = m+1$ とおく. このとき, 条件 (H_1) をみたす. 条件 (H_2) の α を $0 < (m+1)\alpha_0 < 1$ をみたす α_0 とし, 条件 (H_2) の c を $c^{\alpha} \ge \frac{L}{\alpha_0}$ をみたすものとする.

$K=1$ および $y(t)=e^{ct}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma(t)}^{\delta(t)} G(t,s)y(s)ds\\&=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{cs}ds\\&=\frac{Le^{ct}}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{ct} s^{\alpha-1}e^{-s}ds\\&\le \frac{L}{c^{\alpha}}e^{ct}\\&\le \alpha_0 y(t)\end{aligned}$$

である．よって, 条件 (H_2) をみたす．定理 3 より, A はただひとつの不動点をもつ．□

第 5 節　おわりに

本論文の前に, 非整数階微分方程式の研究を行った．[6, 7] を非整数階微分方程式に拡張する試みである．論文は投稿中である．発表は以下の場所で行った．トルコで開催された国際会議「International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal」(Uludag University, Bursa, 2014 年 6 月 23 日から 26 日まで) で豊田が講演した．京都数理解析研究所研究集会「The International Workshop on Nonlinear Analysis and Convex Analysis」(京都大学, 2014 年 8 月 19 日から 21 日) にて, 川崎が講演した．アメリカで開催された国際会議「Tenth Mississippi State Conference on Differential Equations and Computational Simulations」(Mississippi State University, 2014 年 10 月 23 日から 25 日) で豊田が講演した．また, 本論文の内容は, 国際数理科学協会によるシンポジウム (大阪国際大学, 2015 年 3 月 14 日) および日本数学会年会 (明治大学, 2015 年 3 月 21 日から 24 日) にて発表する．

なお, 定理 2 と同様の問題を扱った結果に [1] がある．この論文の結果との関連については今後の課題である．

参考文献

[1] S. Abbas, *Existence of solutions to fractional order ordinary and delay differential equations and applications*, Electronic Journal of Differential Equations, **2011** (2011), 1–11.

[2] 浅田明, 関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する—分数冪微積の話, 「数理の玉手箱」, 遊星社, 東京, 2010, 90–131.

[3] E. de Pascale and L. de Pascale, *Fixed points for some non-obviously contractive operators*, Proceedings of the American Mathematical Society, **130** (2002), 3249–3254.

[4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[5] X. Huang, Z. Wang and Y. Li, *Nonlinear dynamics and chaos in fractional-order Hopfield neural networks with delay*, Advances in Mathematical Physics, **2013** (2013), Article ID 657245, 9 pages.

[6] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Existence of positive solutions of the Cauchy problem for a second-order differential equation*, Journal of Inequalities and Applications, **2013**, 2013:465, 14pages.

[7] 川崎敏治, 豊田昌史, 負冪 Emden-Fowler 方程式の初期値問題の正値解, 玉川大学工学部紀要, **48** (2013), 25–30.

[8] B. Lou, *Fixed points for operators in a space of continuous functions and applications*, Proceedings of the American Mathematical Society, **127** (1999), 1159–2264.

[9] 松崎徹也, 中川匡弘, フラクショナルカオスニューロンモデル, 電子情報通信学会論文誌, **185-A** (2002), 1201–1210.

[10] T. Matsuzaki and M. Nakagawa, *A chaos neuron model with fractional differential equation*, Journal of the Physical Society of Japan, **72** (2003), 2678–2684.

[11] T. Suzuki, *Lou's fixed point theorem in a space of continuous mappings*, Journal of the Mathematical Society of Japan, **58** (2006), 769–774.

2015 年 3 月 15 日原稿受付
Received, March 15, 2015