3.5 階微分方程式境界値問題への半順序集合における不動点定理の適用

Application of a fixed point theorem in partial ordered sets to boundary value problems for 3.5 order differential equations.

豊田昌史 [‡]　渡辺俊一 [*]

Masashi Toyoda　Toshikazu Watanabe

[‡] 玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Faculty of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

[*] 日本大学理工学部, 101–8308 東京都千代田区神田駿河台 1–8–14
College of Science and Technology, Nihon University,
1–8–14 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101–8308

Abstract

In this paper, we apply a fixed point theorem in partial ordered sets to boundary value problems for fractional order differential equations. In particular, we consider α order differential equations where $3 < \alpha \leq 4$. To prove our main theorem, we use a fixed point theorem in [6].

Keywords: Fixed point theorem, fractional boundary value problem, partially ordered set.

1　はじめに

本論文では, 順序と位相の両方を仮定した不動点定理 ([6]) を用いて, 3.5 階境界値問題

$$\begin{cases} D_{0+}^{3.5}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

の解の存在と一意性を示す. f は $[0,1] \times [0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への写像である.

不動点定理は大きくわけて, 順序を仮定したものと, 位相を仮定したものがある. 前者には, Tarski の定理や Bourbaki-Kneser の定理などがあり, 後者は Brouwer の定理や Banach の定理, 角谷の定理などがある. ところが, 何らかの非線形問題に適用する際には, 順序と位相の両方が自然と満たされる場合が多い. 実際, [1], [2] 等の研究では, 連続関数全体の Banach 空間を考えているが, その要素の間には自然と順序を導入できる.

そこで, 本論文では, 順序と位相の両方を仮定した不動点定理に着目し, その適用を扱う. [9] では, 4 階常微分方程式への適用を扱った. 本論文では, α を $3 < \alpha \leq 4$ とし, α 階微分方程式への適用を行う.

構成は, 以下の通りである. 第 2 節で, 分数階微分について解説する. 第 3 節で, 順序と位相の両方を仮定した不動点定理を紹介する. [6] の定理である. 第 4 節が主結果である. [6] の定理を用いて, α 階微分方程式の境界値問題の解の存在性を議論する. $3 < \alpha \leq 4$ である.

2　分数階微分

本節では, 分数階微分や積分の定義および補助命題を述べる. 詳しくは, [4] およびその参考文献をみよ.

$\alpha > 0$ とする. f を $(0,\infty)$ から $\mathbf{R}$ への関数とする. f の α 階 Riemann-Liouville 分数

微分を

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds $$

で定める (p.68 [8]). ここで, $n = [\alpha] + 1$ であり $[\alpha]$ は α の自然数部分を表す. また $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数である. すなわち $p > 0$ に対して

$$ \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx $$

であり, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ などの性質をもつ.

分数階微分 ${}_aD_t^\alpha$ において特に $a = 0$ のとき

$$ D_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds $$

とかく. また, f の α 階 Riemann-Liouville 分数積分を

$$ I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds $$

で定める.

実際, $\alpha = 1$ のとき $n = 2$ より

$$ D_{0+}^1 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t f(s) ds = \frac{d}{dt} f(t) $$

となる. また $\alpha = 2$ のとき $n = 3$ より

$$ D_{0+}^2 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^3}{dt^3} \int_0^t f(s) ds = \frac{d^2}{dt^2} f(t) $$

となる. 同様に, $\alpha = 1$ のとき

$$ I_{0+}^1 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t f(s) ds = \int_0^t f(s) ds $$

である. さらに $\alpha = 2$ のとき

$$ \begin{aligned} I_{0+}^2 f(t) &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^t (t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t (t-s) f(s) ds \\ &= \int_0^t \left(\int_0^s f(\tau) d\tau \right) ds \end{aligned} $$

である.

補助命題 1. $\alpha > 0$, $u \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ とする. このとき, 分数階微分方程式 $D_{0+}^\alpha u(t) = 0$ は, 一意解

$$ u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + +c_n t^{\alpha-n} $$

をもつ. ただし $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $n = [\alpha] + 1$ である.

補助命題 2. $\alpha > 0$, $u \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ とする. また u の α 階導関数は $C(0,1) \cap L^1(0,1)$ の要素であるとする. このとき

$$ \begin{aligned} & I_{0+}^\alpha D_{0+}^\alpha u(t) \\ & = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \cdots + c_n t^{\alpha-n} \end{aligned} $$

である. ただし $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $n = [\alpha] + 1$ である.

3 不動点定理

順序と位相の両方を仮定した不動点定理 ([6]) を紹介する.

$(X, \leq)$ を半順序集合とする, 半順序集合の点列 $\{x_n\}$ が単調非減少であるとは

$$ x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots $$

が成り立つときをいう. X から X への写像 T が単調非減少であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ ならば

$$ Tx \leq Ty $$

が成り立つときをいう.

次の定理が [6] によって示された. 念のため, 証明を記す.

定理 3. $(X, \leq)$ を半順序集合とする. 距離 d が存在して (X, d) が完備距離空間となる. X の単調非減少列 $\{x_n\}$ に対して

$$ x_n \to x \in X \quad (n \to \infty) $$

ならば, 任意の $x_n \in X$ に対して

$$ x_n \leq x $$

をみたすとする. T を X から X への単調非減少写像とし, ある $k \in [0,1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ ならば

$$ d(Tx, Ty) \leq k d(x, y) $$

をみたすとする. ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ. さらに, X の任意の要素 x, y が上界または下界をもつとする. このとき, T は一意の不動点をもつ.

証明. $x_0 \le Tx_0$ で T は単調非減少であるから

$$x_0 \le Tx_0 \le T^2x_0 \le \cdots \le T^nx_0 \le \cdots$$

である. また $x_0 \le Tx_0$ であるから

$$d(T^2x_0, Tx_0) \le kd(Tx_0, x_0)$$

である. さらに $Tx_0 \le T^2x_0$ であるから

$$\begin{aligned} d(T^3x_0, T^2x_0) &\le kd(T^2x_0, Tx_0) \\ &\le k^2d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

である. 結局,

$$d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \le k^nd(Tx_0, x_0)$$

が任意の n に対して成り立つ. $n < m$ に対して

$$\begin{aligned} &d(T^mx_0, T^nx_0) \\ &\le d(T^mx_0, T^{m-1}x_0) + d(T^{m-1}x_0, T^{m-2}x_0) \\ &\qquad + \cdots + d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \\ &\le (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n)d(Tx_0, x_0) \\ &< (k^n + k^{n+1} + \cdots)d(Tx_0, x_0) \\ &= \frac{k^n}{1-k}d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき $\{T^nx_0\}$ は Cauchy 列である. X は完備であるから, ある $p \in X$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} T^nx_0 = p$$

である. ここで

$$x_0 \le Tx_0 \le T^2x_0 \le \cdots \le T^nx_0 \le T^{n+1}x_0 \le \cdots$$

であり $T^nx_0 \to p$ であるから, $T^nx_0 \le p$ が任意の n に対して成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} d(Tp, p) &\le d(Tp, T^{n+1}x_0) + d(T^{n+1}x_0, p) \\ &\le kd(p, T^nx_0) + d(T^{n+1}x_0, p) \end{aligned}$$

である. $n \to \infty$ として, $d(Tp, p) = 0$ を得る. 以上から $Tp = p$ である.

最後に, T の不動点は一意であることを示す. q を T の他の不動点とする. q が p と比較可能であるならば, $T^nq = q$ は $T^np = p$ と任意の n に対して比較可能である. このとき

$$d(p, q) = d(T^np, T^nq) \le k^nd(p, q)$$

であるから $d(p, q) = 0$ を得る.

q が p と比較可能でないとする. このとき, ある $z \in X$ が存在して z は p, q と比較可能である. このとき T^nz は $T^np = p$ および $T^nq = q$ と任意の n に対して比較可能である. このとき

$$\begin{aligned} d(p, q) &\le d(T^np, T^nz) + d(T^nz, T^nq)) \\ &\le k^nd(p, z) + k^nd(z, q) \end{aligned}$$

である. よって, $n \to \infty$ として $d(p, q) = 0$ を得る. □

定理 3 は, さらに拡張されている. 例えば, [5] などを参照されたい.

4 主結果

Nieto-López による順序と位相の両方を仮定した不動点定理 (定理 3) を, 境界値問題

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}u(t) + f(t, u(t)) = 0, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

に適用する. ここで, $3 < \alpha \le 4$ であり f は $[0, 1] \times [0, \infty)$ から $\mathbf{R}$ への写像である.

次の補助定理が必要である.

補助命題 4. $h \in C[0, 1]$ とする. $3 < \alpha \le 4$ とする. このとき, 境界値問題

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}u(t) = h(t), \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

の一意の解は

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)ds$$

である. ここで $[0, 1] \times [0, 1]$ への関数 G は, 次で定義される.

$$
G(t,s)=\begin{cases}
\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left((t-s)^{\alpha-1}+t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}\left(\dfrac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{2(2\alpha-5)}s^2-\dfrac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{2\alpha-5}s-1\right)\right. \\
\qquad\left.+t^{\alpha-3}(1-s)^{\alpha-3}\left(\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\alpha-5}s-\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2(2\alpha-5)}s^2\right)\right) & (0\le s\le t\le 1) \\
\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}\left(\dfrac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{2(2\alpha-5)}s^2-\dfrac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{2\alpha-5}s-1\right)\right. \\
\qquad\left.+t^{\alpha-3}(1-s)^{\alpha-3}\left(\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\alpha-5}s-\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2(2\alpha-5)}s^2\right)\right) & (0\le t\le s\le 1)
\end{cases}
$$

証明．補助命題 1 および 2 より

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+C_1t^{\alpha-1}+C_2t^{\alpha-2}+C_3t^{\alpha-3}+C_4t^{\alpha-4}$$

である．$u(0)=0$ より $C_4=0$ である．また

$$u'(t)=\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-2}h(s)ds+(\alpha-1)C_1t^{\alpha-2}+(\alpha-2)C_2t^{\alpha-3}+(\alpha-3)C_3t^{\alpha-4}$$

である．さらに

$$u''(t)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-3}h(s)ds+(\alpha-1)(\alpha-2)C_1t^{\alpha-3}$$
$$+(\alpha-2)(\alpha-3)C_2^{\alpha-4}+(\alpha-3)(\alpha-4)C_3t^{\alpha-5}$$

である．$u''(0)=0$ より, $C_2=0$ となる．したがって

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+C_1t^{\alpha-1}+C_3t^{\alpha-3}$$

を得る．$u(1)=u''(1)=0$ より

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds+C_1+C_3=0$$

かつ

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-3}h(s)ds+(\alpha-1)(\alpha-2)C_1+(\alpha-3)(\alpha-4)C_3=0$$

である．これより

$$C_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-3}\left(\frac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{2(2\alpha-5)}s^2-\frac{(\alpha-3)(\alpha-4)}{2\alpha-5}s-1\right)h(s)ds$$

および

$$C_3=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-3}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\alpha-5}-\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2(2\alpha-5)}s^2\right)h(s)ds$$

を得る．以上より

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+C_1t^{\alpha-1}+C_3t^{\alpha-3}=\int_0^1G(t,s)ds$$

を得る．$\square$

補助命題 4 の関数 $G(\cdot, s)$ は連続である. 実際, 次を得る.

補助命題 5. $3 < \alpha \leq 4$ とする. G を補助命題 4 の関数とする. このとき

$$\int_0^1 G(t,s)ds$$
$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(t^\alpha - \frac{3(\alpha-2)}{2\alpha-5}t^{\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{2\alpha-5}t^{\alpha-3}\right)$$

である. ここで $0 \leq s \leq t \leq 1$ である.

次が主結果である.

定理 6. f を $[0,1] \times [0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への関数とする. f は連続で, 第 2 変数に関して単調非減少とする. ある $\lambda \in [0, \frac{1}{\Lambda}]$ が存在して, 任意の $y \geq x$ となる $x, y \in [0,\infty)$ および $t \in [0,1]$ に対して

$$f(t,y) - f(t,x) \leq \lambda(y-x)$$

が成り立つとする. ただし

$$\Lambda = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)ds$$

である. このとき, 境界値問題

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

は, 一意の非負値解をもつ.

証明. 補助命題 5 より, Λ は存在することに注意されたい. $P = \{u \in C[0,1] \mid u(t) \geq 0\}$ とする. このとき (P, d) は

$$d(x,y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

によって定める距離によって完備となる. P 上の作用素 T を

$$(Tx)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s, x(s))ds$$

で定める. ここで $x \in P$ である. このとき, $G(t,s)$ は連続で非負であるから, $T(P) \subset P$ である. $u \geq v$ となる $u, v \in P$ および $t \in [0,1]$ をとる. このとき

$$\begin{aligned}(Tu)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds \\ &\geq \int_0^1 G(t,s)f(s,v(s))ds \\ &= (Tv)(t)\end{aligned}$$

である. よって T は単調非減少である. $u \geq v$ となる $u, v \in P$ に対して

$$\begin{aligned}&d(Tu, Tv) \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |Tu(t) - Tv(t)| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} (Tu(T) - Tv(t)) \\ &= \sup_t \int_0^1 G(t,s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))ds \\ &\leq \sup_t \int_0^1 G(t,s)\lambda k(u(s) - v(s))ds \\ &\leq \lambda k(d(u,v) \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)ds \\ &= \lambda k d(u,v)\Lambda \\ &\leq k d(u,v)\end{aligned}$$

である. また $T0 \geq 0$ である. 定理 3 より, T はただ 1 つの不動点をもつ. □

5 おわりに

順序と位相の両方を仮定した不動点定理 ([6]) もしくは分数階微分に関連して, いくつかの講演発表を行った.

弘前で行われた国際会議「第 8 回非線形と凸解析 (NACA2013)」(弘前大学, 2013 年 8 月 2 日から 8 月 6 日まで) において, 渡辺が講演発表を行った. 定理 3 が縮小写像に関連する結果であるのに対して, Kannan 写像に関する結果を報告した. タイトルは「Kannan mappings in partially ordered sets with metric」である. 詳しくは [10] を参照されたい.

京都数理解析研究所によって行われた研究集会「非線形関数解析学と凸解析学の研究」(京都大学, 2013 年 10 月 9 日から 10 月 11 日まで) において, 豊田が講演発表を行った. タイトルは「Kannan mapping theorems in partially ordered sets」である. 詳しくは [11] を参照されたい.

数理経済学会が主催しているセミナー「Mathematical Economics Monday Seminar」(慶応大学, 2013 年 12 月 2 日) において, 豊田が講演発表を行った．タイトルは, 「順序性を仮定した不動点定理とその非線形問題への適用」である．詳しくは, 数理経済学会のサイトにある要約 [7] を参照されたい.

台湾の高雄で行われた国際会議「The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization(ICNAO2013)」(國立中山大学, National Sun Yat-sen University, 2013 年 12 月 20 日から 22 日まで) において, 豊田が講演発表を行った．タイトルは「Generalization of Knežević-Miljanović's theorem to a class of fractional differential equations」である．この発表は, 豊田および川　先生 (日本大学/玉川大学) との共同研究である.

参考文献

[1] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Existence of positive solution for the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, Advances in Intelligent and Soft Computing, 100 (2011), 435–441.

[2] T. Kawasaki and M. Toyoda, *On the existence of solutions of second order ordinary differential equations*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces IV, 2012, 403–413.

[3] A. A. Kilbas and J. J. Trujillo, *Differential equations of fractional order: methods resutls and problems-I*, Appl. Anal. **78** (2001), 153–192.

[4] J. Caballero, J. Harjani and K. Sadarangani, *On existence and uniqueness of positive solutions to a class of fractional boundary value problems*, Boundary Value Problems **2011**, 2011:25.

[5] J. Harjani and K. Sadarangani, *Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3403–3410.

[6] J J. Nieto and R. R. López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, **22**(2005), 223–239.

[7] 豊田昌史, 順序性を仮定した不動点定理とその非線形問題への適用, 数理経済学会, http://ethic.econ.osaka-u.ac.jp/ (アクセス: 2014 年 1 月)

[8] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.

[9] 豊田昌史, 渡辺俊一, 4 階微分方程式境界値問題への半順序集合における不動点定理の適用, 玉川大学工学部紀要, **48** (2013), 31–36.

[10] M. Toyoda and T. Watanabe, *Kannan mapping theorems in partially ordered sets*, 京都数理解析研究所講究録に採録予定.

[11] M. Toyoda and T. Watanabe, *Application of fixed point theorems in partial ordered set to boundary value problems for fourth order differential equations*, to appear in the Proceedings of the 8th Conference of Nonlinear Analysis and Convex Analysis.

2014 年 2 月 12 日原稿受付
Received, February 12, 2014