

体験を通して学ぶ数学

Learning mathematics through actual experiences

宮永 望 *

Nozomi Miyanaga

日下 芳朗 †

Yoshiaki Kusaka

玉川大学工学部, 194-8610 東京都町田市玉川学園 6-1-1

Faculty of Engineering, Tamagawa University,
6-1-1 Tamagawa-Gakuen, Machida, Tokyo 194-8610

abstract

The authors present two teaching materials to learn mathematics through actual experiences and report the practical influence of the materials on students.

1 体験を通して学ぶ数学

数学の学習の中心は、机の上での紙と鉛筆によるものである。しかし多くの学習者が、学習の意義を見失い、しばしば以下のような投げやりの言葉を口にする。「数学なんて机上の空論ではないか」とか「三平方の定理を使うことなんて、自分の人生では、一度もないのではないか」とか「数学なんて、日常生活どころか、学校で習う他の科目でさえ使われないではないか」とか「数学的帰納法による証明の作法を押し付けられても、論理的思考力はアップしないのではないか」とか。

これらの言葉に反論することは易しいことではないだろう。しかし、「三平方の定理を使って、化学物質の分子構造の分析やオブジェの工作をする」経験や「数学的帰納法は、自分の中に存在している論理的思考

法を洗練させたものだ、と実感する」経験があれば、上記のような言葉はそもそも口から出てこないのではないだろうか。そして、そんな「体験を通して学ぶ数学」では、学ぶこと自体に喜びを感じるのではないだろうか。さらに、その喜びは、「机の上で学ぶ通常の数学」にもつながるのではないだろうか。

今回の報告では、そんな体験をするための数学の教材を二つ提案する。一つは「ダイヤモンドの結晶」のオブジェであり、もう一つは「ハノイの塔」というパズルである。前者は「A4, B5などの身近な規格用紙の幾何学的性質（辺の長さの比が $\sqrt{2}:1$ ）を利用して、ダイヤモンドの結晶をモチーフにしたオブジェを工作する」という教材であり、後者は「パズルで遊んでいるうちに、内発的に、数学的帰納法の考え方をすることになる」という教材である。

*玉川大学工学部 (nozomiyana@vesta.ocn.ne.jp)

†玉川大学工学部 (kusaka@eng.tamagawa.ac.jp)

第2章では、「ダイヤモンドの結晶」の構造を数学的に分析し、その構造をモチーフにしたオブジェの制作を、理科や数学や芸術の総合的学習のための教材として、提案する。第3章では、パズル「ハノイの塔」の解法を数学的に分析し、このパズルを、自分の心に内在する数学的思考法を発見するための教材として、提案する。

著者の二人は、2013年度の玉川大学の学園祭『コスモス祭』において、「ダイヤモンドの結晶」や「ハノイの塔」を題材にした企画を行った。また、著者の一人（宮永）は、過去に何度か、玉川大学の全学部対象の科目『数学入門』において、「ダイヤモンドの結晶」や「ハノイの塔」を題材にした授業を行った。今回の報告では、『コスモス祭』や『数学入門』での実践の様子についても詳しく述べる。

2 ダイヤモンドの結晶で学ぶ数学

2.1 ダイヤモンドの結晶

ダイヤモンドの結晶について述べるための準備をする。集合 L , L' を

$$L = \left\{ \begin{array}{l} i(2, 0, 0) + j(0, 2, 0) + k(0, 0, 2) \\ | i, j, k \in \mathbf{Z}, (i + j + k)/2 \in \mathbf{Z} \end{array} \right\},$$

$$L' = \{(x + 1, y + 1, z + 1) \mid (x, y, z) \in L\}$$

と定める ($\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$)。

合併集合 $L \cup L'$ を、「直線 $x = y = 0$ と垂直な平面」で切断して図示すると、図 2.1 のようになる。図 2.1 では、記号「○」、「●」はそれぞれ集合 L , L' の点を表している。また、右向き、上向きの矢印はベクトル $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ を表しており、矢印の始点は直線 $x = y = 0$ 上の点になっている。

図 2.1 をもとにすると写真 2.1 の模型を組み立てることができる。この模型は『HGS 分子構造模型』（丸善出版）で組み立てたものである。

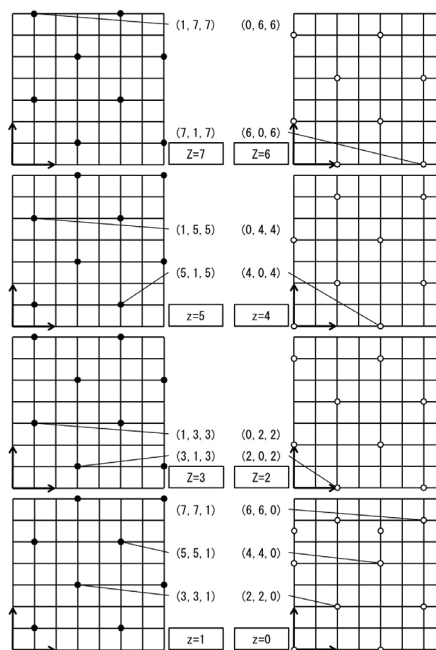


図 2.1 : ダイヤモンドの結晶（「水平」に切断）

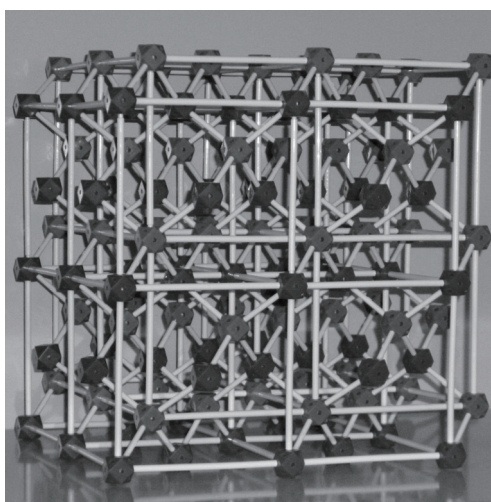


写真 2.1 : 図 2.1 をもとにした模型

図 2.1 や写真 2.1 から分かるように、集合 L , L' はどちらも面心立方格子（格子の辺の長さは 4）の構造を持っている。合併集合 $L \cup L'$ の各点に炭素原子を配置すると、それがダイヤモンドの結晶になる。

ダイヤモンドの結晶には以下の性質 α , α' がある（性質 α , α' の双対性に注意）。

性質 α : 点 $(x, y, z) \in L$ の炭素原子は、4

個の点

$$\begin{aligned} &(x+1, y+1, z+1), \\ &(x+1, y+1, z+1) - (0, 2, 2), \\ &(x+1, y+1, z+1) - (2, 0, 2), \\ &(x+1, y+1, z+1) - (2, 2, 0) \in \mathbf{L}' \end{aligned}$$

の炭素原子と共有結合している。 \mathbf{L}' のこの4個の点で正四面体 (辺の長さは $2\sqrt{2}$) ができ、その正四面体の重心が点 $(x, y, z) \in \mathbf{L}$ になる。

性質 α' : 点 $(x+1, y+1, z+1) \in \mathbf{L}'$ の炭素原子は、4個の点

$$\begin{aligned} &(x, y, z), \\ &(x, y, z) + (0, 2, 2), \\ &(x, y, z) + (2, 0, 2), \\ &(x, y, z) + (2, 2, 0) \in \mathbf{L} \end{aligned}$$

の炭素原子と共有結合している。 \mathbf{L} のこの4個の点で正四面体 (辺の長さは $2\sqrt{2}$) ができ、その正四面体の重心が点 $(x+1, y+1, z+1) \in \mathbf{L}'$ になる。

性質 α, α' において、正四面体の頂点と重心の距離は $\sqrt{3}$ である。実際のダイヤモンドではこの距離 (共有結合の長さ) は 0.15 ナノメートルとなっている。

2.2 ダイヤモンドの結晶の数学的分析

2.1 節の性質 α, α' は、図 2.1 や写真 2.1 を見ても、直観的には理解しにくい。しかし、集合 \mathbf{L}, \mathbf{L}' の格子を「斜め」から見れば、直観的に理解できるようになる。

集合 \mathbf{L} の格子を「斜め」から見るためには、座標変換

$$\begin{aligned} &i(2, 0, 0) + j(0, 2, 0) + k(0, 0, 2) \\ &= l(0, 2, 2) + m(2, 0, 2) + n(2, 2, 0) \\ &(i = m + n, j = l + n, k = l + m; \\ &l = (i + j + k)/2 - i, \\ &m = (i + j + k)/2 - j, \\ &n = (i + j + k)/2 - k) \end{aligned}$$

によって、集合 \mathbf{L} を

$$\mathbf{L} = \left\{ \begin{array}{l} l(0, 2, 2) + m(2, 0, 2) + n(2, 2, 0) \\ | l, m, n \in \mathbf{Z} \end{array} \right\}$$

と言い換えればよい。

この言い換えにより図 2.2 を容易に描くことができる。図 2.2 は、合併集合 $\mathbf{L} \cup \mathbf{L}'$ を「直線 $x = y = z$ と垂直な平面」で切断した図である。図 2.2 の記号「○」、「●」は図 2.2 と同様である。また、右向き、左上向き、左下向きの矢印はベクトル $(2/3, 2/3, -4/3)$, $(2/3, -4/3, 2/3)$, $(-4/3, 2/3, 2/3)$ を表しており、矢印の始点は直線 $x = y = z$ 上の点になっている。

図 2.2 をもとにすると写真 2.2 の模型を組み立てることができる。この模型も『HGS 分子構造模型』で組み立てたものである。

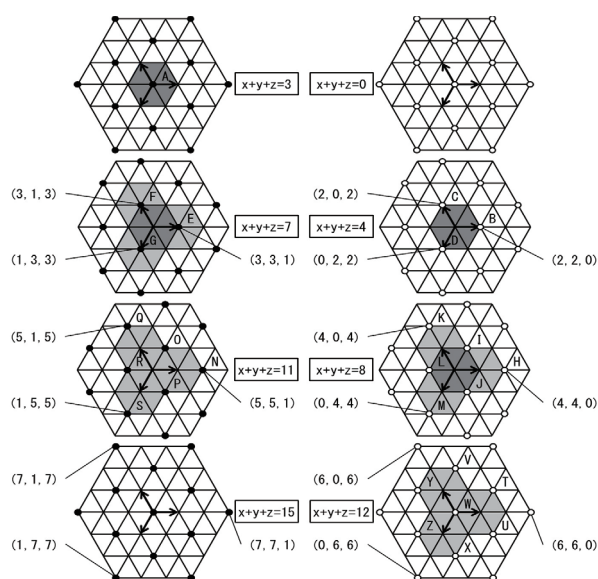


図 2.2 : ダイヤモンドの結晶 (「斜め」に切断)

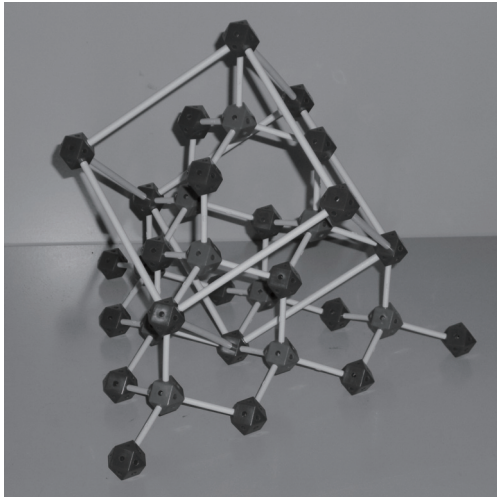


写真 2.2 : 図 2.2 をもとにした模型

図 2.2 や写真 2.2 により, 性質 α , α' が一目瞭然になる.

図 2.2 や写真 2.2 のダイヤモンドの結晶には「辺の長さが $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ の二等辺三角形」がいたる所に潜んでいるが, この二等辺三角形は A4, B5 などの「辺の長さが $2\sqrt{2}$, 2 の長方形」(白銀長方形) の紙で簡単に折ることができる. そして, この二等辺三角形を何個も折り, それらをテープでつなぐことにより, ダイヤモンドの結晶のオブジェを作ることができる.

写真 2.3 は, 図 2.2 や写真 2.2 をもとにして作った, ダイヤモンドの結晶のオブジェである. このオブジェの二等辺三角形の頂点に炭素原子を配置すると, ダイヤモンドの結晶になる.

写真 2.3 のようなオブジェは, 写真 2.4 の「穴あき立体」が複数個準備できていれば, それらを組み合わせることにより簡単に完成できる (立体の個数を増やせば, 巨大な結晶を作ることできる). 写真 2.3 のオブジェは写真 2.4 の 4 個の「穴あき立体」を組み合わせたものであり, その 4 個は以下の「穴あき立体」である (A~Z は図 2.2 の点).

図 2.2 の点 A, B, C, D, E, F, G, I, J, L でできる「穴あき立体」1

図 2.2 の点 E, H, I, J, N, O, P, T, U, W でできる「穴あき立体」2

図 2.2 の点 F, I, K, L, O, Q, R, V, W, Y でできる「穴あき立体」3

図 2.2 の点 G, J, L, M, P, R, S, W, X, Z でできる「穴あき立体」4

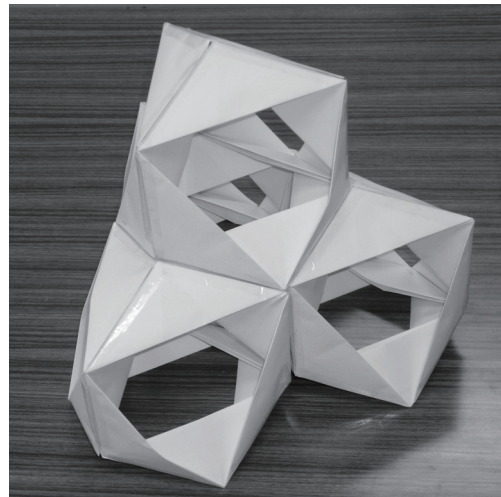


写真 2.3 : ダイヤモンド結晶のオブジェ



写真 2.4 : 「穴あき立体」

2.3 数学の教材としてのダイヤモンドの結晶

写真 2.3 のオブジェは A4, B5 などの規格用紙から簡単に作ることができる。そして、自分の手で作って自分の目で観察することにより、数学の深い構造（正四面体・正八面体による空間充填や性質 α , α' の相対性など）に触れることができる。

このオブジェを小学生が作れば、身近な規格用紙に潜む数理の不思議を感じるはずだし、三平方の定理を知っている中高生が作れば、その不思議が数学で解明できることを（自力では解明できなくても）想像できるはずだ。また、誰が作っても、ダイヤモンドを電子顕微鏡で分析したときに出現する構造が、折り紙による手作業で目の当たりにできるという体験は、自然の摂理や神秘（ダイヤモンドが硬い理由や美しい理由など）を垣間見る体験となるに違いない。

小中高生や大学生や大人たちに、ダイヤモンドの結晶のオブジェの工作をすすめたい。なぜなら、このオブジェを作ることにより、理科や数学や美術を総合的に学ぶことの喜びと大切さを、実体験できるからである（実際に工作を体験してもらったときの様子を、2.4, 2.5 節で詳しく報告する）。

「穴あき立体」1 の作り方を以下で説明する（「穴あき立体」2~4 の作り方も同様である）。

まず、同じ大きさの「辺の長さが $2, 2\sqrt{2}$ の長方形」の紙を 24 枚用意し、その 24 枚を折って「辺の長さが $2\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3}$ の二等辺三角形」を 24 個作る（図 2.3）。そして、その 24 個を 6 個ずつテープでつないで「穴あき六角形」を 4 個作る（図 2.3, 2.4）。最後に、「穴あき六角形」4 個をテープで張り合わせて「穴あき立体」1 とする（図 2.4）。

写真 2.5, 2.6 は「穴あき立体」1 の実際の工作過程である。

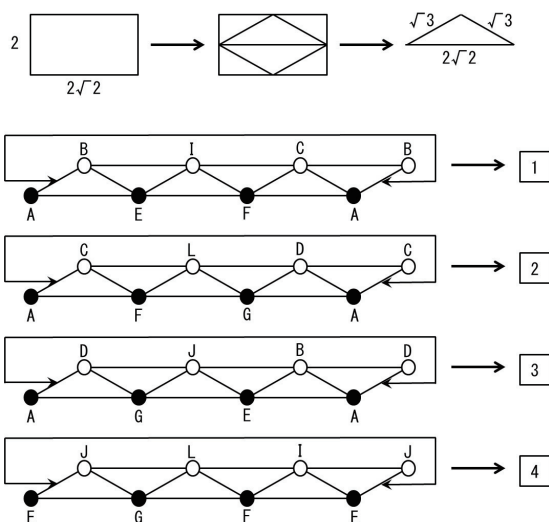


図 2.3 : 「穴あき立体」の工作過程 (1)

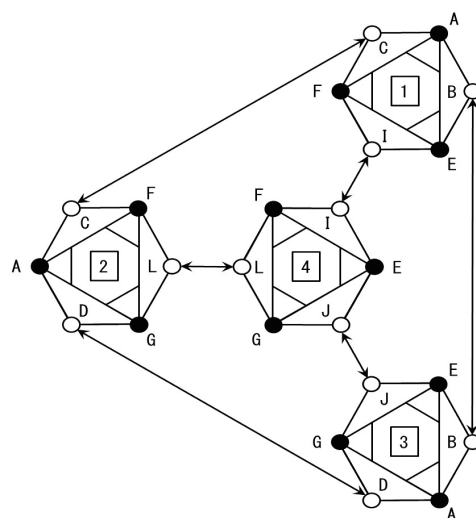


図 2.4 : 「穴あき立体」の工作過程 (2)

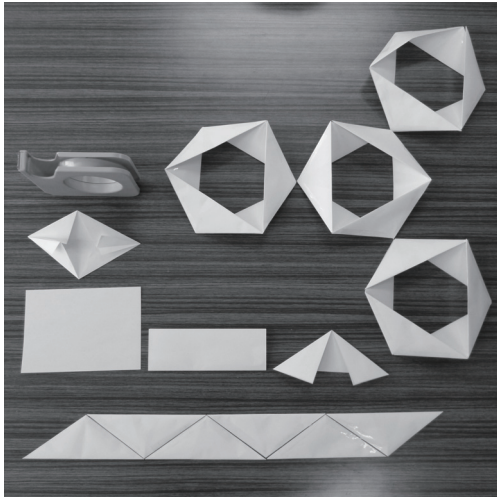


写真 2.5 : 実際の工作過程 (1)

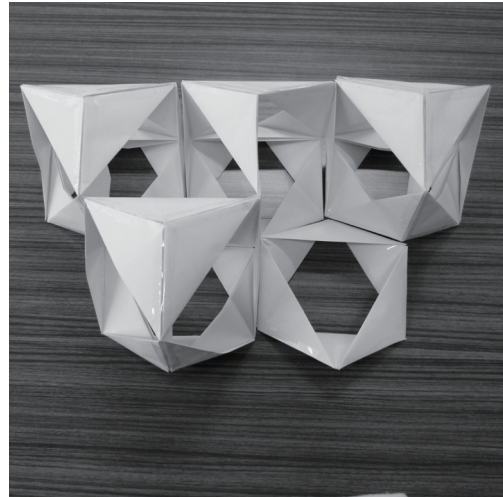


写真 2.6 : 実際の工作過程 (2)

2.4 『コスモス祭』でのダイヤモンドの結晶

『コスモス祭』では、ダイヤモンドのオブジェの工作体験コーナーを設けた。会場には巨大オブジェ (写真 2.7, 2.8) を展示したが、多くの来場者がそのオブジェを凝視をしていた。しかし残念ながら、大半の来場者は、形状の美しさよりも形状の複雑さに圧倒されたようで、「とても自分には工作できなそうだ」と早々に工作を敬遠してしまった。10分ほどで「穴あき立体」の作り方をマスターできること、そしてその「穴あき立体」を組み合わせるだけで巨大なオブジェを作れること、を力説してみたが、足早に他の会場へ行こうとする来場者を留まらせるのは困難だった。

とはいえ、工作に取り組んでいる誰かがちょうどいるときの来場者や、ナビゲーターの大学生から既に工作を終えた誰かの話を聞いた来場者は、かなりの率で、「自分にもできそうだ」と工作にチャレンジしてくれた。チャレンジした人は、オブジェの複雑さと作業の単純さとのギャップに一様に驚いていた。そして、チャレンジした人の多くが、「自宅で大きなオブジェを作りたいので、紙

をもらえないか」と申し出ていた (もちろん差し上げた)。『コスモス祭』では A6 用紙を使ったが、折りやすさの面でもテープの張りやすさの面でも紙の強度の面でも、このサイズが最もオブジェの工作に適していたようだ。

工作した来場者の中で特に意欲的だった数名には、A6 などの規格用紙の幾何学的性質を簡単に説明した (立方体をこう切断面すると規格用紙の長方形ができる、という説明をした)。説明を聞いたある来場者は、展示してあったダイヤモンドの模型 (写真 2.1, 2.2) と A6 用紙に交互に手をやりながら、「そうか、模型のこの部分がこの長方形になっているのか!」としきりに感心していた。

なお、オブジェ作りにチャレンジすることはなかったが、展示物の巨大オブジェを、何かに取りつかれたかのように数分間じっと見入っていた小学生がいたことも、併せて報告しておきたい。

2.5 『数学入門』でのダイヤモンドの結晶

『数学入門』でダイヤモンドのオブジェの工作を題材にした際には、学期中に印刷した授業用 A4 プリントの残部を利用して（資源ごみにせずに）、最終回の授業で、受講生と一緒に巨大なオブジェに挑戦した。写真 2.7, 2.8 がそのときの巨大オブジェである（この巨大オブジェは『コスモス祭』の企画で展示した）。

授業では、はじめにダイヤモンドの結晶の絵を見せ、その絵が「辺の長さが $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ の二等辺三角形」により構成されていることを説明した（立方体を切断することで正四面体ができる、という説明をした）。次に、その二等辺三角形が A4, B5 な

どの「辺の長さが $2\sqrt{2}$, 2 の長方形」（白銀長方形）の紙で折れることを、三平方の定理を使って説明した。

以上の前置きの後に、学生に「穴あき立体」の作り方を説明し、1 個ずつ「穴あき立体」を作ってもらった。そして最後に、それらの「穴あき立体」を組み合わせてオブジェを完成させた。

どの学生も、面倒くさがったりせずに嬉々として作業に取り組んでいたし、A4 用紙の意外性に驚いていたようだ。残念ながら、授業時間を若干オーバーしてしまい、次のコマに授業がなかった学生にしか完成品を見てもらえなかったが、最後まで残っていた学生たちは、完成品を携帯電話の写真に収めていた。数学の良い思い出になったのではないだろうか。



写真 2.7: 『数学入門』でオブジェ（斜めから）



写真 2.8: 『数学入門』のオブジェ（上から）

3 ハノイの塔で学ぶ数学

3.1 ハノイの塔

ハノイの塔とは、3 本の棒と何枚かの大きさの異なる穴あき円盤で構成された、写真 3.1, 3.2 のようなパズルである（円盤は 1 枚の場合もある）。ハノイの塔では、円盤を 1 枚ずつ棒から棒へ移動させるが、円盤の移動中以外は、どんな状態においても、すべ

での円盤を棒に通しておく必要がある。

円盤の通し方に一つだけ約束事がある。それは「どの棒のどの円盤の上にも、その円盤より大きい円盤を通してはいけない」ということである。

以下では、3 本の棒を左から A, B, C と名付け、ハノイの塔の状態（局面）を (A,C,B,C) などと表記する。(A,C,B,C) という表記は「円盤が全部で 4 枚あり、4 枚を大きい順に A, C, B, C に通してある」とい

う意味で使う。

このような表記法の下で，状態 (A,C,B,C) ， (A,A,A,A) は，写真 3.1，3.2 の状態を意味することになる（写真 3.1 の棒 C での円盤の上下関係に注意）．なお，状態 (A,C,B,C) の次の状態（円盤を 1 枚移動させた直後の状態）として考えられるのは

(A,C,A,C) （棒 B の円盤を棒 A へ移動），

(A,C,B,A) （棒 C の円盤を棒 A へ移動），

(A,C,B,B) （棒 C の円盤を棒 B へ移動）

の 3 通りであり，状態 (A,A,A,A) の次の状態として考えられるのは

(A,A,A,B) （棒 A の円盤を棒 B へ移動），

(A,A,A,C) （棒 A の円盤を棒 C へ移動）

の 2 通りである（どんな状態においても，移動できる可能性がある円盤は，棒の 1 番上の円盤のみである）．

円盤が 4 枚の場合のハノイの塔の（標準的な）遊び方はこうである．それは，「状態 (A,A,A,A) から始めて，円盤の移動を繰り返すことで，状態 (C,C,C,C) に到達させる」という課題を解決することである．円盤の移動回数が少ない解法ほど，良い解法とみなされる．一般の n 枚の場合の遊び方も同様である．

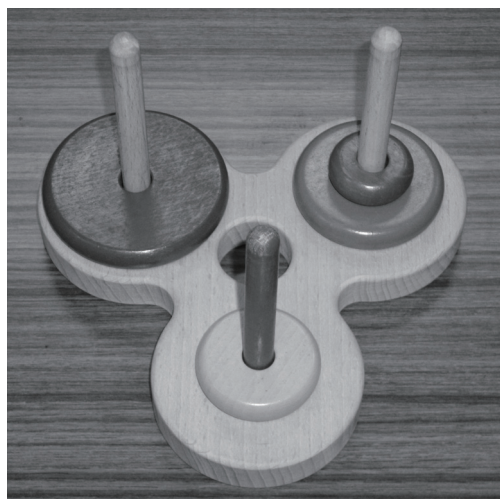


写真 3.1：状態 (A,C,B,C) のハノイの塔

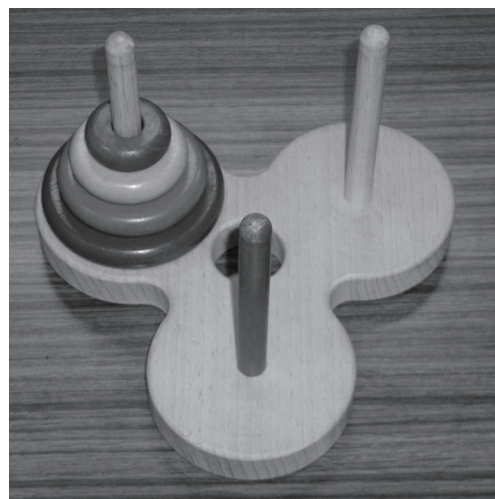


写真 3.2：状態 (A,A,A,A) のハノイの塔

3.2 ハノイの塔の数学的分析

ハノイの塔の解法は，実際に手を動かして遊んでみれば，子どもでもぼんやりと認識できるものだが，この節では，その解法を数学の言葉で言語化し明確なものにする．以下では，円盤の枚数が 1 枚の場合の解法から 3 枚の場合までの解法を順に分析し，その後一般の n 枚の場合の解法に言及する．

円盤が 1 枚の場合のハノイの塔の状態変化 $(A) \rightarrow (C)$ を実現するには，円盤を 1 回移動させるだけでよく，その移動手順が 1 枚

の場合の唯一の最短手順になる．

円盤が 2 枚の場合のハノイの塔の状態変化 $(A,A) \rightarrow (C,C)$ に関しても，最短手順が唯一存在する．その手順は，

$(A,A) \rightarrow (A,B) \rightarrow (C,B) \rightarrow (C,C)$

という，移動回数が 3 の手順である．

円盤が 1 枚，2 枚の上記の解法は単純すぎるので，これらの解法から一般の n 枚の場合の解法を推測するのは難しい．しかし 3 枚の場合の解法を考察すれば，その考察をもとに n 枚の解法を推測できる．

円盤が3枚の場合のハノイの塔の状態変化 $(A,A,A) \rightarrow (C,C,C)$ についても、解法の手順が存在する。その手順は、

序盤 $(A,A,A) \rightarrow (A,A,C) \rightarrow (A,B,C) \rightarrow (A,B,B)$

中盤 $(A,B,B) \rightarrow (C,B,B)$

終盤 $(C,B,B) \rightarrow (C,B,A) \rightarrow (C,C,A) \rightarrow (C,C,C)$

という、移動回数が7(序盤3, 中盤1, 終盤3)の手順である。序盤と終盤での手順が、どちらも本質的には、円盤が2枚の場合のハノイの塔の最短手順となっていることに注意。

実は、この7回の手順は唯一の最短手順になっている。そのことを証明するには、以下の二つのことを確認すればよい。一つは、

序盤 (A,A,A) から (A,B,B) へ変化

中盤 (A,B,B) から (C,B,B) へ1回で変化

終盤 (C,B,B) から (C,C,C) へ変化(最大の円盤はCから移動しない)

というタイプの手順が最短手順だとすると、その手順が上記の移動回数が7の手順になること。もう一つは、

序盤 (A,A,A) から (B,A,A) へ変化

中盤 (B,A,A) から (C,A,A) へ1回で変化

終盤 (C,A,A) から (C,C,C) へ変化(最大の円盤はCから移動しない)

というタイプの手順が最短手順だとすると、「最短」性に矛盾が生じること。以上の二つのことの確認は、少し込み入った議論は必要だが、どちらも容易にできる(議論は省略)。

円盤が3枚の場合のハノイの塔の解法をまとめておく。

円盤が3枚の場合のハノイの塔の状態変化 $(A,A,A) \rightarrow (C,C,C)$ に関して、唯一の最短手順が存在する。その手順は、

序盤 (A,A,A) から (A,B,B) へ3回で変化(最大の円盤はAから移動しない)

中盤 (A,B,B) から (C,B,B) へ1回で変化

終盤 (C,B,B) から (C,C,C) へ3回で変化(最大の円盤はCから移動しない)

という、移動回数が7の手順である。ここでの序盤と終盤の手順は、どちらも本質的には、円盤が2枚の場合のハノイの塔の最短手順である。

さて、この3枚の場合の解法は、次のように n 枚の場合の解法に一般化できる。

円盤が n 枚の場合のハノイの塔の状態変化 $(A,A,\dots,A) \rightarrow (C,C,\dots,C)$ に関して、唯一の最短手順が存在する。その手順は、

序盤 (A,A,\dots,A) から (A,B,\dots,B) へ $2^{n-1}-1$ 回で変化(最大の円盤はAから移動しない)

中盤 (A,B,\dots,B) から (C,B,\dots,B) へ1回で変化

終盤 (C,B,\dots,B) から (C,C,\dots,C) へ $2^{n-1}-1$ 回で変化(最大の円盤はCから移動しない)

という、移動回数が 2^n-1 の手順である。ここでの序盤と終盤の手順は、どちらも本質的には、円盤が $n-1$ 枚の場合のハノイの塔の最短手順である。

n 枚の場合の証明は、数学的帰納法を使うことでできる。証明の流れは、3枚の場合の証明と同様である。

3.2節を終えるにあたり、(理論的な最短手順でなく)実践的な最短手順について少しコメントしておく。実際に手を動かしながら最短手順をなぞっていると、次の当たり前の性質 β が強力なことに気がつく。

性質 β : 最短手順では、同じ円盤を続けて動かすことはない。

この性質を用いれば、「ある円盤を動かした直後に、どの円盤を動かすべきか?」という問いに答えることが、3.2節で行ったような理論的考察とは関係なく、簡単なことになる。

例えば、ある円盤を動かした直後に、その円盤よりも大きい円盤と小さい円盤が1枚ずつ、他の2本の棒の1番上に載っていたとする。そのときには、最短手順の次の一手が、必然的に「1番上の3枚の中で最小の円盤を動かす」という手になる。

しかし、「その最小の円盤を、残り2本の棒のどちらへ動かすべきか？」ということまでは、性質 β を利用する素朴な考え方は判別できない（判別方法については3.5節で述べる）。このような局面で移動先を誤ると、最短手順からそれてしまう。そして、そのようなときには大抵泥沼にはまってしまう。枚数が多い場合のハノイの塔でゴールへたどり着けなくなるのは、大抵このようなときである。

ハノイの塔では、「 n 枚の場合の最短手順」の一部が「 $(n-1)$ 枚の場合の最短手順」になっている。このようなネスト構造（再帰構造）をはっきりと認識できていないと、枚数が多い場合には、最短手順を間違わずに遂行するのが難しい。

3.3 数学の教材としてのハノイの塔

ハノイの塔は、ルールが自然で、ゴールが明確なパズルなので、誰もがすぐに遊び方を理解できるパズル、誰もが手と頭を同時に動かして楽しめるパズルであると期待できる。このことは、『コスモス祭』でハノイの塔を体験した、低学年の小学生から高齢者までの幅広い年齢の人たちに対して、確認できた事実であった。体験した誰もが、ナビゲーターの大学生が実演した枚数が少ない場合の解法に促されて、容易に遊び方を理解し、夢中になって楽しんでいた。

『コスモス祭』で設けたハノイの塔の体験コーナーでの反応は、年齢によってまちまちであった（詳細は3.4節）。しかし、あらゆる人に共通するある現象が観察できた。それは、ある程度の時間パズルに触れた誰もが、「枚数が多い場合の解法を、枚数が少ない場合の解法に帰着させることで、発見する」という現象である。数学では「特殊化

して規則性を発見し、その規則性を一般化する」ことが常套手段の一つだが、ハノイの塔というパズルで遊ぶことにより、（多少の個人差はあるものの）誰もがこの常套手段を実際に使っていた。

また、これは一部の人たちに対してしか確認できなかった現象だが、周りの者が適切な示唆をすれば、誰もがこの常套手段を（無意識に使うだけでなく）意識化できるようだ。そして、いったん意識化できれば、自分自身のことを誇らしく感じるようだ。パズルが解けたことを利他的に喜ぶだけでなく、自分の中に特殊化や一般化の能力が存在していたことを誇らしく感じるようだ。

子どもから大人まで、あらゆる世代の人たちに、数学の教材としてのハノイの塔をすすめたい。なぜなら、このパズルで遊ぶことにより、「特殊化して規則性を発見し、その規則性を一般化する」という数学的態度の有効性と喜びを、実体験できるからである。

3.4 『コスモス祭』でのハノイの塔

『コスモス祭』のハノイの塔のコーナーにはハノイの塔を10セットほど準備したが、それらすべてが使用中という時間帯も、珍しくはなかった。やはり、ルールやゴールが分かりやすいパズルだからだろう。

ハノイの塔のコーナーで遊んでいた、ある小学生の様子はこうであった。

まずは円盤が7枚の場合で遊んでもらったが、やみくもに円盤を動かすだけで、当然のことながら、解決への糸口はまったくつかめずにいた。しばらく遊ばせた後、今度は円盤が3枚の場合にチャレンジさせたところ、思考錯誤ではあったが、なんとかゴールにたどり着くことができた。しかし一度ゴールにたどり着いた後も、自力で移動手順をマスターしたかったようで、何度も再チャレンジしていた。そして数分後には、3枚の場合の手順を確実にマスターできていた。そこで最後に、4枚の場合にチャレンジさせてみた。すると見事にほとんど無駄（動き戻し）のない手順でゴールにたどり着き、得意気な笑みを浮かべていた。

だが、小学生の反応に大きな個人差があったことも事実だ。

3枚の場合で一度ゴールにたどり着いたら、その後は3枚の場合には目もくれずに、すぐに4枚にチャレンジする小学生が少なくなかった。そういった小学生には、(最短でも15回の移動が必要な)4枚のハノイの塔はやはり手強かったようで、決まって堂々巡りにおちいていた(一部の小学生はイライラし出していた)。そういった小学生には、2枚の場合をやらせてみた。すると、ほとんどの小学生があっという間にクリアできていたのだが、今度は最初の3枚のときは違って、「なぜクリアできたのか」を自分からすすんで考えていた。そして、2枚での手順の考察をもとに、3枚での手順を手を動かしながらゆっくり考察しはじめた。そしてここまでくれば、あとは上述の小学生とほとんど同様であった。しばらくして3枚の手順が完璧にマスターできたら、その後すぐに4枚の場合もクリアできていた。

小学生は、何枚の場合にでも通用する戦略を自力で発見すると、そのことがとても嬉しいらしく、クリアまでの時間を縮めるという新たな目標を設定しながら、5枚以上の場合に何度もチャレンジしていた。もちろん、時間が縮まることも嬉しかったのだろう。しかし、「自分で発見した戦略が、枚数が多い場合にも通用する」ということを手を動かしながら確認する、そういう行為自体が嬉しかったのではないだろうか。

中学生以上の様子はおおむねこうであった。「ある枚数でうまくいかなかったら、枚数を減らして考えてみる」とか「ある枚数でうまくいく戦略が見つかったら、その戦略を枚数を増やして確かめてみる」ということが、誰かに誘導されたりしなくても、自然にできていた。また、一部の来場者は、おのずから、パズルのルールを少し変更して遊んでみたり、円盤の枚数だけでなく棒の本数を増やすとどうなるかの考察を始めていた。

ハノイの塔というパズルで遊んでいると、「特殊化して規則性を発見し、その規則性を一般化する」という数学的能力が、(能力の個

人差はあるにせよ)誰にでも自然に発露するようだ。

3.5 『数学入門』でのハノイの塔

円盤が n 枚のハノイの塔には 3^n 通りの状態があるが、3.2節で考察した最短手順には(最初と最後の状態を含めて) 2^n 通りの状態しかない。そこで、次の疑問が生じる。円盤の移動の手順次第で、残りの $3^n - 2^n$ 通りの状態すべてに到達できるのか？

実は、最初の状態がどうであれ、 3^n 通りの状態すべてに到達できる。そして、その 3^n 通りの状態に対して状態遷移図を作ると、図3.1のフラクタル図形(シェルピンスキー・ガセット)が出現する(図3.1では、状態を表す際に括弧とコンマを省略している)。

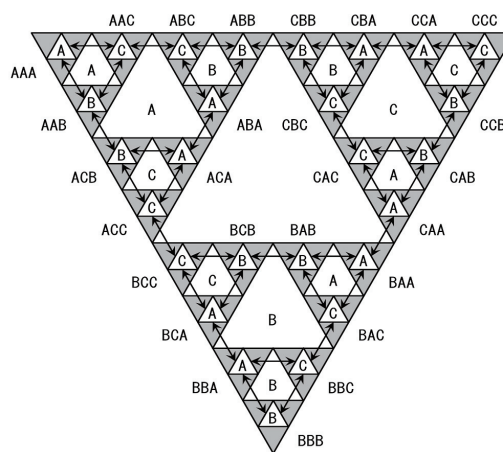


図 3.1 : ハノイの塔の状態遷移図

図 3.1 を見れば状態 (A,A,A) から状態 (C,C,C) への(移動回数が $2^n - 1$)最短手順がすぐに分かるが(図の上辺を見ればよい), この図から他にもいろいろなことが分かる。例えば、状態 (A,A,A) から状態 (C,C,C) への(移動回数が $3^n - 1$)最長手順が分かる(最長手順において、同じ状態を複数回出現させることは禁止)。

この遷移図を作るために必要な考察は、3.2節で最短手順を調べたときの考察と、本質的には同じである。最短手順の考察では「 n 枚の場合の最短手順」の一部として「 $(n-1)$ 枚の場合の最短手順」を利用したが、状態遷移図の考察では「 n 枚の場合の状態遷移

図」の一部として「 $(n-1)$ 枚の場合の状態遷移図」を利用すればよい。

『数学入門』の授業では、ハノイの塔の状態遷移図を題材にした。まず、円盤が1枚、2枚、3枚の場合の状態遷移図について、作り方を順に解説した。そして、「3枚の場合の状態遷移図」3枚を利用して、「4枚の場合の状態遷移図」を作成する、という課題にチャレンジしてもらった。どの学生も正しい図を作成できていたし、ほとんどの学生が図の正しさの根拠を完璧に説明できていた。ある学生の課題の感想に、以下のようなくだりがあった。「ハノイの塔で遊んだときに、なんとなく手順を図式化できそうな気がした。しかし、実際に図を作ってみたら、予想外に美しい図になって驚いた！」

どの学生も、ハノイの塔で遊ぶ際に、ハノイの塔に潜むネスト構造（再帰構造）やフラクタル構造（入れ子構造）に、なんとなく気がついたようだ。そして状態遷移図を作る際に、自分の中のぼんやりとした感覚が深い数学的構造を持った美しい図形として表現できることに、驚いたようだ。大学生時代の貴重な体験の一つになったのではないだろうか。

さて、3.2節の最後で述べたように、ハノイの塔で実際に最短手順をなぞるときには、動かすべき円盤は瞬時に決まるのに、その円盤をどこへ動かすべきかで悩むことになる。しかし実は、そのようなときには次の性質 γ に着目すればよい。

性質 γ ：ハノイの塔での最短手順においては、大きい方から奇数番目の円盤は棒を「AからCへ、CからBへ、BからAへ」と移動し、大きい方から偶数番目の円盤は棒を「AからBへ、BからCへ、CからAへ」と移動する。

先の性質 β とこの性質 γ を知っていれば、ハノイの塔の最短手順で悩むことはない。これらの性質を踏まえれば、状態遷移図を見

なくても最短手順からそれることない。

とはいえ、性質 γ に3.2節での分析だけから気づくのは、難しいのではないだろうか。しかし、自分で実際に作った状態遷移図を見れば、この性質に気づくことは決して難しくはないはずだ。

謝辞

2013年度の玉川大学『コスモス祭』において、快く出展場所をご提供くださり、貴重なご助言をくださった、工学部物理学研究室の先生方に謝意を表します。また、『コスモス祭』でナビゲーターとして活躍した工学部数学研究室のゼミ生と、『コスモス祭』で展示した巨大オブジェの制作に携わった『数学入門』の受講生にも、謝意を表します。

参考文献

- [1] 小林正光, 野村祐次郎, 数研出版編集部, 『もういちど読む 数研の高校化学』, 数研出版, 2011年.
- [2] 砂田利一, 『ダイヤモンドはなぜ美しい? 離散調和解析入門』, シュプリンガー・ジャパン, 2006年.
- [3] 前川淳, 『本格折り紙 $\sqrt{2}$ 』, 日貿出版社, 2009年.
- [4] 秋山久義, 『ボードパズル読本』, 新紀元社, 2009年.
- [5] 根上生也, 『第三の理 ハノイの塔修復秘話』, 日本評論社, 1999年.
- [6] イアン・スチュアート (訳: 山崎秀記, 坂井公, 田中裕一), 『スチュアート教授のおもしろ数学入門』, 日経サイエンス社, 1993年.