負冪 Emden-Fowler 方程式の初期値問題の正値解

Positive solutions of initial value problems of negative exponent Emden-Fowler equations

川崎敏治　　豊田昌史
Toshiharu Kawasaki　　Masashi Toyoda

玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Faculty of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

In this paper we consider the equation $u''(t) = f(t, u(t))$ and prove the unique solvability of the Cauchy problem $u(0) = 0$, $u'(0) = \lambda$ with $\lambda > 0$.

Keywords: Fixed point, Emden-Fowler equation, Cauchy problem, positive solution.

1　はじめに

2 階微分方程式

$$u''(t) = P(t)u(t)^{\sigma}, \quad 0 < t < 1$$

は $\sigma > 0$ の場合, 一般化 Emden-Fowler 方程式としてよく知られている. ここで, $P(t)$ は連続関数である. 一般化 Emden-Fowler 方程式には, 数多くの研究論文がある. 例えば, よく知られたサーベイ論文に [21] がある. $\sigma < 0$ の場合の研究も知られており, 例えば, [18], [11] などがある.

[19] では, [11] の定理の別証明を与えた. 不動点定理を用いた証明である. [19] を踏まえ, 本論文では [11] の結果を一般化する.

2　主結果

本節では, 2 階微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)),\ t \in [0, 1], \\ u(0) = 0,\ u'(0) = \lambda, \end{cases} \tag{1}$$

について考える. ここで, f は $[0, 1] \times [0, \infty)$ から $\mathbf{R}$ への関数であり, $\lambda \in \mathbf{R}$ は $\lambda > 0$ である.

定理 1. $[0, 1] \times [0, \infty)$ から $\mathbf{R}$ への関数 f は次をみたす.

(a)　f は Carathéodory 条件をみたす. すなわち, 任意の $u \in (0, \infty)$ に対して, 関数 $t \longmapsto f(t, u)$ は可測であり, ほとんどいたるところの $t \in [0, 1]$ に対して, 関数 $u \longmapsto f(t, u)$ は連続である.

(b)　ほとんどいたるところの $t \in [0, 1]$ と任意の $u_1 \le u_2$ となる $u_1, u_2 \in [0, \infty)$ に対して $|f(t, u_1)| \ge |f(t, u_2)|$ である.

(c)　ある $0 < \alpha < \lambda$ となる $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\int_0^1 |f(t, \alpha t)| dt < \infty$$

をみたす.

(d)　ある $\beta > 0$ となる $\beta \in \mathbf{R}$ が存在して, ほとんどいたるところの $t \in [0, 1]$ および任意の $u \in (0, \infty)$ に対して

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(t, u) \right| \le \frac{\beta |f(t, u)|}{u}$$

をみたす.

このとき, ある $0 < h \le 1$ となる $h \in \mathbf{R}$ が存在して, 初期値問題 (1) は X に一意の解をもつ. ここで, X は $C[0, h]$ の部分集合

$$X = \left\{ u \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in C[0, h], u(0) = 0, u'(0) = \lambda, \\ \text{任意の } t \in [0, h] \text{ に対して } \alpha t \le u(t) \end{array} \right\}$$

である. $C[0, h]$ は $[0, h]$ から $\mathbf{R}$ への関数全体の集合である.

証明. $C[0,h]$ は, ノルム

$$\|u\| = \max\{|u(t)| \mid t \in [0,h]\}.$$

において Banach 空間である. 初期値問題 (1) の代わりに, 積分方程式

$$u(t) = \lambda t + \int_0^t (t-s) f(s, u(s)) ds$$

を考える. 条件 (c) より, ある $0 < h \leq 1$ となる $h \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\int_0^h |f(t, \alpha t)| dt < \min \left\{ \lambda - \alpha, \frac{\alpha}{\beta} \right\}$$

をみたす. X から $C[0,h]$ への作用素 A を

$$Au(t) = \lambda t + \int_0^t (t-s) f(s, u(s)) ds$$

で定める. 関数 $t \longmapsto \lambda t$ は X の要素であるから, $X \neq \emptyset$ である. さらに $A(X) \subset X$ である. 実際, 条件 (a) より $Au \in C[0,h]$ である. また $Au(0) = 0$ である. さらに, 任意の $t \in [0,h]$ に対して

$$(Au)'(0) = \left[\lambda + \int_0^t f(s, u(s)) ds \right]_{t=0} = \lambda$$

であり, 条件 (b) より

$$\begin{aligned} Au(t) &= \lambda t + \int_0^t (t-s) f(s, u(s)) ds \\ &\geq \lambda t - t \int_0^h |f(s, u(s))| ds \\ &\geq \lambda t - t \int_0^h |f(s, \alpha s)| ds \\ &\geq \alpha t \end{aligned}$$

が成り立つ.

A の不動点をみつける. X から $C[0,h]$ への作用素 φ を

$$\varphi[u](t) = \begin{cases} \frac{u(t)}{t}, & (t \in (0,h]), \\ \lambda, & (t = 0) \end{cases}$$

で定める. このとき $\varphi[X] = \{\varphi[u] \mid u \in X\}$ であり, さらに $\varphi[X] = \{v \mid v \in C[0,h],\ v(0) = \lambda,$ 任意の $t \in [0,h]$ に対して $\alpha \leq v(t)$ をみたす $\}$ と表せる. $\varphi[X]$ は $C[0,h]$ の閉集合であるから, 完備である. $\varphi[X]$ から $\varphi[X]$ への作用素 Φ を

$$\Phi\varphi[u] = \varphi[Au]$$

で定める. 平均値の定理から, 任意の $u_1, u_2 \in X$ に対して, ある ξ が存在して, 任意の $t \in [0,h]$ に対して

$$\frac{f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))}{u_1(t) - u_2(t)} = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi(t))$$

および

$$\min\{u_1(t), u_2(t)\} \leq \xi(t) \leq \max\{u_1(t), u_2(t)\}$$

が成り立つ. このとき, 後者の式から $\alpha t \leq \xi(t)$ が成り立つ. 条件 (b) および (d) より, ほとんどいたるところの $t \in [0,h]$ に対して

$$\begin{aligned} &|f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))| \\ &= \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi(t))(u_1(t) - u_2(t)) \right| \\ &\leq \left| \frac{\beta f(t, \xi(t))}{\xi(t)} \right| |u_1(t) - u_2(t)| \\ &\leq \left| \frac{\beta f(t, \alpha t)}{\alpha t} \right| |u_1(t) - u_2(t)| \end{aligned}$$

が成り立つ. 実際, 条件 (b) より, $\alpha t \leq \xi(t)$ ならば $f(t, \xi(t)) \leq f(t, \alpha t)$ である. よって, 任意の $t \in [0,h]$ に対して

$$\begin{aligned} &|\Phi\varphi[u_1](t) - \Phi\varphi[u_2](t)| \\ &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t (t-s)(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) ds \right| \\ &\leq \int_0^h \left| \frac{\beta f(s, \alpha s)}{\alpha s} \right| |u_1(s) - u_2(s)| ds \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^h |f(s, \alpha s)| \left| \frac{u_1(s)}{s} - \frac{u_2(s)}{s} \right| ds \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^h |f(s, \alpha s)| \left| \varphi[u_1](s) - \varphi[u_2](s) \right| ds \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha} \int_0^h |f(s, \alpha s)| ds \|\varphi[u_1] - \varphi[u_2]\| \end{aligned}$$

が成り立つ. これより

$$\begin{aligned} &\|\Phi\varphi[u_1] - \Phi\varphi[u_2]\| \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha} \int_0^h |f(s, \alpha s)| ds \|\varphi[u_1] - \varphi[u_2]\| \end{aligned}$$

である. Banach の不動点定理より, ある一意の $\varphi[u] \in \varphi[X]$ が存在して $\Phi\varphi[u] = \varphi[u]$ をみたす. よって $Au = u$ である. □

定理 2. $[0,1]\times[0,\infty)$ から $\mathbf{R}$ への関数 f は次をみたす.

(a) f は Carathéodory 条件をみたす. すなわち, 任意の $u\in(0,\infty)$ に対して, 関数 $t\longmapsto f(t,u)$ は可測であり, ほとんどいたるところの $t\in[0,1]$ に対して, 関数 $u\longmapsto f(t,u)$ は連続である.

(e) ほとんどいたるところの $t\in[0,1]$ と任意の $u_1\le u_2$ となる $u_1,u_2\in[0,\infty)$ に対して $|f(t,u_1)|\le|f(t,u_2)|$ である.

(f) ある $0<\alpha<\lambda$ となる $\alpha\in\mathbf{R}$ が存在して

$$\int_0^1|f(t,(2\lambda-\alpha)t)|dt<\infty$$

をみたす.

(d) ある $\beta>0$ となる $\beta\in\mathbf{R}$ が存在して, ほとんどいたるところの $t\in[0,1]$ および任意の $u\in(0,\infty)$ に対して

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)\right|\le\frac{\beta|f(t,u)|}{u}$$

をみたす.

このとき, ある $0<h\le1$ となる $h\in\mathbf{R}$ が存在して, 初期値問題 (1) は X に一意の解をもつ. ここで, X は $C[0,h]$ の部分集合

$$X=\left\{u\ \middle|\ \begin{array}{l}u\in C[0,h],u(0)=0,u'(0)=\lambda\\ \text{任意の } t\in[0,h] \text{ に対して}\\ \alpha t\le u(t)\le(2\lambda-\alpha)t \text{ をみたす}\end{array}\right\}$$

である.

証明. 条件 (f) より, ある $0<h\le1$ となる $h\in\mathbf{R}$ が存在して

$$\int_0^h|f(t,(2\lambda-\alpha)t)|dt<\min\left\{\lambda-\alpha,\frac{\alpha}{\beta}\right\}$$

をみたす. X から $C[0,h]$ への作用素 A を

$$Au(t)=\lambda t+\int_0^t(t-s)f(s,u(s))ds$$

で定める. 関数 $t\longmapsto\lambda t$ は X の要素であるから, $X\neq\emptyset$ である. さらに $A(X)\subset X$ である.

実際, 条件 (a) より, $Au\in C[0,h]$ である. また $Au(0)=0$ である. さらに

$$(Au)'(0)=\left[\lambda+\int_0^t f(s,u(s))ds\right]_{t=0}=\lambda$$

である. 条件 (e) より, 任意の $t\in[0,h]$ に対して

$$\begin{aligned}Au(t)&=\lambda t+\int_0^t(t-s)f(s,u(s))ds\\&\ge\lambda t-t\int_0^h|f(s,u(s))|ds\\&\ge\lambda t-t\int_0^h|f(s,(2\lambda-\alpha)s)|ds\\&\ge\alpha t\end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned}Au(t)&=\lambda t+\int_0^t(t-s)f(s,u(s))ds\\&\le\lambda t+t\int_0^h|f(s,u(s))|ds\\&\le\lambda t+t\int_0^h|f(s,(2\lambda-\alpha)s)|ds\\&\le(2\lambda-\alpha)t\end{aligned}$$

である. A の不動点をみつける. X から $C[0,h]$ への作用素 φ を

$$\varphi[u](t)=\begin{cases}\frac{u(t)}{t}, & (t\in(0,h]),\\ \lambda, & (t=0)\end{cases}$$

で定める. このとき $\varphi[X]=\{\varphi[u]\mid u\in X\}$ である. さらに $\varphi[X]=\{v\mid v\in C[0,h],\ v(0)=\lambda,$ 任意の $t\in[0,h]$ に対して $\alpha\le v(t)\le(2\lambda-\alpha)\}$ と表せる. $\varphi[X]$ は $C[0,h]$ の閉集合であるから, 完備である. $\varphi[X]$ から $\varphi[X]$ への作用素 Φ を

$$\Phi\varphi[u]=\varphi[Au]$$

で定める. 平均値の定理から, 任意の $u_1,u_2\in X$ に対して, ある ξ が存在して, 任意の $t\in[0,h]$ に対して

$$\frac{f(t,u_1(t))-f(t,u_2(t))}{u_1(t)-u_2(t)}=\frac{\partial f}{\partial u}(t,\xi(t))$$

および

$$\min\{u_1(t),u_2(t)\}\le\xi(t)\le\max\{u_1(t),u_2(t)\}$$

が成り立つ．このとき，後者の式から $\alpha t \leq \xi(t) \leq (2\lambda-\alpha)t$ が成り立つ．条件 (e) および (d) より，ほとんどいたるところの $t \in [0,h]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|f(t,u_1(t)) - f(t,u_2(t))| \\
&= \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t,\xi(t))(u_1(t)-u_2(t)) \right| \\
&\leq \left| \frac{\beta f(t,\xi(t))}{\xi(t)} \right| |u_1(t)-u_2(t)| \\
&\leq \left| \frac{\beta f(t,(2\lambda-\alpha)t)}{\alpha t} \right| |u_1(t)-u_2(t)|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．実際，条件 (e) より，$\alpha t \leq \xi(t) \leq (2\lambda-\alpha)t$ ならば $f(t,\xi(t)) \leq f(t,(2\lambda-\alpha)t)$ である．よって，任意の $t \in [0,h]$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|\Phi\varphi[u_1](t) - \Phi\varphi[u_2](t)| \\
&= \left| \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)(f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)))ds \right| \\
&\leq \int_0^h \left| \frac{\beta f(s,(2\lambda-\alpha)s)}{\alpha s} \right| |u_1(s)-u_2(s)|ds \\
&= \frac{\beta}{\alpha}\int_0^h |f(s,(2\lambda-\alpha)s)| \left| \frac{u_1(s)}{s} - \frac{u_2(s)}{s} \right| ds \\
&\leq \frac{\beta}{\alpha}\int_0^h |f(s,(2\lambda-\alpha)s)|ds \|\varphi[u_1]-\varphi[u_2]\|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi\varphi[u_1] - \Phi\varphi[u_2]\| \\
&\leq \frac{\beta}{\alpha}\int_0^h |f(s,\alpha s)|ds \|\varphi[u_1]-\varphi[u_2]\|
\end{aligned}
$$

である．Banach の不動点定理より，ある一意の $\varphi[u] \in \varphi[X]$ が存在して $\Phi\varphi[u] = \varphi[u]$ をみたす．よって $Au = u$ である．□

3 例および注

例 1. 論文 [11] において，初期値問題

$$
\begin{cases} u''(t) = P(t)t^a u(t)^\sigma, \ t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \ u'(0) = \lambda, \end{cases} \tag{2}
$$

が扱われている．ここで，$a, \sigma, \lambda \in \mathbf{R}$ は $\sigma < 0$ および $\lambda > 0$ をみたす．また P は $[0,1]$ から $\mathbf{R}$ への連続関数で

$$
\int_0^1 |P(t)| t^{a+\sigma} dt < \infty
$$

をみたす．$f(t,u) = P(t)t^a u^\sigma$ とするとき，条件 (a), (b), (c) および (d) をみたす．実際

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\partial f}{\partial u}(t,u) \right| &= |P(t)t^a \sigma u^{\sigma-1}| \\
&= \frac{|\sigma||f(t,u)|}{u}
\end{aligned}
$$

より (d) が成り立つ．定理 1 によって，初期値問題 (2) は定理 1 の X に一意の解をもつ．

例 2. 初期値問題

$$
\begin{cases} u''(t) = a(t) + u(t)^\sigma, \ t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \ u'(0) = \lambda, \end{cases} \tag{3}
$$

を考える．ここで，関数 a は正であり，積分可能である．また $\lambda, \sigma \in \mathbf{R}$ であり $\lambda > 0$ である．$f(t,u) = a(t) + u^\sigma$ とすると，条件 (a), (e), (f) および (d) をみたす．実際

$$
\left| \frac{\partial f}{\partial u}(t,u) \right| = |\sigma||u|^{\sigma-1} \leq \frac{a(t)+u^\sigma}{u} = \frac{|f(t,u)|}{u},
$$

より (d) をみたす．よって，$-1 < \sigma < 0$ のとき，初期値問題 (3) は定理 1 の X に一意の解をもつ．また，$1 \geq \sigma > 0$ のとき，初期値問題 (3) は定理 2 の X に一意の解をもつ．

注. 実数値関数 f に対して f_0 および f_∞ を

$$
f_0 = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u}, \quad f_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{f(u)}{u}
$$

で定める．$f_0 = 0$ および $f_\infty = \infty$ の場合を優線形 (superlinear)，$f_0 = \infty$ および $f_\infty = 0$ の場合を劣線形 (sublinear) という．$f(u) = u$ に対して，$\sigma > 1$ の場合は優線形，$\sigma < 1$ の場合は劣線形である．

4 おわりに

釜山で開催された第 8 回国際会議「Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2011)」(Pukyong National University, 2011 年 8 月 2 日から 5 日まで)，研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」(京都数理解析研究所, 2011 年 8 月 29 日から 31 日まで) および北京で開催された国際会議「Nonlinear Mathematics for Uncertanity and its Applications」(Beijing University of Technology, 2011 年 9 月 7 日から 9 日まで) で，[7] について講演した．後者の会議録をまとめるにあたって，横浜国立大学の塩路直樹先生よりアドバイスを頂いた．

その時に御紹介いただいた論文が, [1], [2], [3], [22] である.

日本数学会 2012 年度年会 (東京理科大学, 2012年3月26日から29日まで) で, [7] の一部および [8] の一部について講演した. また, 第3回アジア会議「Nonlinear Analysis and Optimiztion (NAO-Asia2012)」(島根くにびきメッセ, 2012 年 9 月 2 日から 6 日まで) および第 4 回国際シンポジウム「Banach and Function Spaces 2012 (ISBFS2012)」(九州工業大学, 2012 年 9 月 12 日から 15 日まで) で, [8] について講演した. 後者の会議でお会いした群馬大学の渡辺秀司先生とは後日 (2012 年 11 月 19 日) 勉強会の機会をいただいた. 論文 [15], [16], [17] も御紹介いただいた.

テキサスのキングズビル (Kingsville) で開催された国際会議「Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations (TMANE2012)」(Texas A&M University, 2012 年 12 月 17 日から 21 日まで) では, [8, 9] の内容を発表した. 講演を聞いてくださった Vojislav Marić 先生より 17 個の参考文献のある論文 [12] を御紹介いただいた.

日本数学会 2013 年度年会 (京都大学, 2013 年 3 月 20 日から 23 日まで) で, [9] の内容を発表する予定である.

参考文献

[1] A. Canino and M. Degiovanni, *A variational approach to a class of singular semilinear elliptic equations*, Journal of Convex Analysis, **11** (2004), 147–162.

[2] M. M. Coclite and G. Palmieri, *On a singluar nonlinear Dirichlet problem*, Communications in Partial Differential Equations, **14** (1989), 1315–1327.

[3] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz and L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Communications in Partial Differential Equations, **2** (1977), 193–222.

[4] L. H. Erbe and H. Wang, *On the existence of positive solutions of ordinary differential equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, **120** (1994), 743–748.

[5] H. T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover Publications, New York, 1962.

[6] P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, Inc., 1964.

[7] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Existence of positive solution for the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, Nonlinear Mathematics for Uncertainly and its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, 100, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2011, 435–441.

[8] T. Kawasaki and M. Toyoda, *On the existence of solutions of second order ordinary differential equations*, Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, Sep. 12-15, 2012, Kitakyushu-Japan, to appear.

[9] T. Kawasaki and M. Toyoda, *On the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, in preparation.

[10] 川崎敏治, 豊田昌史, *Existence of positive solution for the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, 京都大学数理解析研究所講究録に掲載予定.

[11] J. Knežević-Miljanović, *On the Cauchy problem for an Emden-Fowler equation*, Differential Equations **45** (2009), 267–270.

[12] V. Marić and J. V. Manojlović, *Asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type differential equations*, Preprint.

[13] 内藤学, Emden-Fowler 型常微分方程式に対する振動理論, 数学, **37** (1985), 144–160.

[14] Y. Naito and S. Tanaka, *On the existence of multiple solutions of the boundary value problem for nonlinear second-order differential equations*, Nonlinear Analysis, **56** (2004), 919–935.

[15] S. Watanabe, *A mathematical proof that the transition to a superconducting state is a second-order phase transition*, Far East Journal of Mathematical Sciences, **34** (2009), 37–57.

[16] S. Watanabe, *The solution to the BCS gap equation and the second-order phase transition in superconductivity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **383** (2011), 353–364.

[17] S. Watanabe, *Is the solution to the BCS gap equation continuous in the temperature?*, arXiv:1008.4436.

[18] S. P. Taliaferro, *A nonlinear singular boundary value problem*, Nonlinear Anal. **3**(1979), 897–904.

[19] 豊田昌史, 穴水直哉, 川崎敏治, 木村卓也, 最上つばさ, 佐藤壮輔, 2 階微分方程式の解の存在性, 玉川大学工学部紀要, **46** (2011), 113–117.

[20] Y. Wang and X. Liu, *Positive solutions of singular boundary value problem of negative exponent Emden-Fowler equation*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), **113** (2003), 195–205.

[21] J. S. W. Wong, *On the generalized Emden-Fowler equation*, SIAM Review, **17** (1975), 339–360.

[22] Z. Zhang and J. Yu, *On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **32** (2000), 916–927.

2013 年 2 月 28 日原稿受付
Received, February 28, 2013