4階微分方程式境界値問題への半順序集合における不動点定理の適用

Application of fixed point theorems in partial ordered set to boundary value problems for fourth order differential equations

豊田昌史 ‡　渡辺俊一 *
Masashi Toyoda　Toshikazu Watanabe

‡ 玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Faculty of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

* 日本大学理工学部, 101–8308 東京都千代田区神田駿河台 1–8–14
College of Science and Technology, Nihon University,
1–8–14 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101–8308

Abstract

In this paper we apply a fixed point theorem in partial ordered set [2] to boundary value problems for fourth order differential equations.

Keywords: Fixed point, partial order, differential equation, boundary value problem.

1　はじめに

半順序集合における不動点定理が [2] で紹介されている．さらに, 1 階微分方程式の境界値問題への応用が与えられている．

本論文では, [2] の不動点定理を 4 階微分方程式境界値問題に適用する．[2] と同様に, 下側解の存在を仮定して境界値問題の解の存在および一意性を論じる

4 階微分方程式境界値問題

$$\begin{cases} y''''(t) = f(t, y(t), y''(t)), \\ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで f は $I \times R \times R$ から R への連続写像とする．写像 $y \in C^4(I, R)$ が (1) の条件をみたすとき (1) の解であるという．ここで $I = [0, 1]$ である．

本論文の構成は以下である．2 節では, 半順序集合の不動点定理が紹介する．3 節では, 境界値問題 (1) の一意解の存在を示す．4 節では, 不動点定理や補助定理の証明を与える．

2　不動点定理

$(X, \leq)$ を半順序集合とする, すなわち, 次をみたす．(I) $x \in X$ ならば $x \leq x$ である．(II) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$ である．(III) $x, y, z \in X$ に対して $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ である．半順序集合の点列 $\{x_n\}$ が単調非減少であるとは, $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$ が成り立つときをいう．X から X への写像 T が単調非減少であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \leq y$ ならば $Tx \leq Ty$ が成り立つときをいう．

[2] において, 次の定理が示されている．

定理 1. $(X, \leq)$ を半順序集合とする．距離 d が存在して (X, d) は完備距離空間とする．X の単調非減少な点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x \in X$ $(n \to \infty)$ をみたすならば, 任意の $x_n \in X$ に対して $x_n \leq x$ をみたすとする．T を X から X への写像で単調非減少とする．ある $k \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x \leq y$ ならば $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ をみたすとする．ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする．このとき T は不動点をもつ．

定理 1 の不動点はただひとつとは限らない. 実際, 次の例がある.

例 1. 集合 $X=\{(1,0),(0,1)\}$ に対して

$$(x_1,y_1)\le(x_2,y_2)\Longleftrightarrow x_1\le x_2 \text{かつ}\ y_1\le y_2$$

で順序 $\le$ を定めると $(X,\le)$ は半順序集合となる. 異なる要素は比較不能である. 実際, X の要素はそれ自身の要素とのみ比較可能である. しかしながら, d_2 を R^2 における通常のユークリッド距離とした場合 (X,d_2) は完備距離空間である. X から X への写像 T を

$$T(x,y)=(x,y)$$

で定める. このとき, T は連続で, 単調非減少である. また $k\in(0,1]$ とする. このとき, 任意の $(x_1,y_1)\le(x_2,y_2)$ に対して

$$d_2(T(x_1,y_1)),T(x_2,y_2))\le kd_2(x_1,y_1),(x_2,y_2))$$

が成立する. さらに $(1,0)\le T(1,0)=(1,0)$ である. さらに X の点列 $\{(x_n,y_n)\}$ が $(x,y)\in X$ に収束する単調非減少列であるとする. このとき, $\{(x_n,y_n)\}$ はすべて同じ要素からなる点列である. 実際, 任意の $n\in N$ に対し $(x_n,y_n)=(x,y)$ である. よって, $\{(x_n,y_n)\}$ の極限を (x,y) とかくとき, $(x_n,y_n)\le(x,y)$ が成り立つ.

以上より, 定理 1 が適用可能で, T は不動点をもつ. 実際, $(1,0)$ も $(0,1)$ も T の不動点である.

不動点の一意性をいうには, さらなる条件が必要である. x, y を半順序集合 X の任意の要素とする. $x\le z$ および $y\le z$ をみたす z を, x および y の上界という. また, $x\ge z$ および $y\ge z$ をみたす z を, x および y の下界という.

定理 2. 定理 1 の仮定をすべてみたすとする. さらに, X の任意の要素 x, y は上界または下界をもつとする. このとき, T はただひとつの不動点をもつ.

定理 1 および 2 の T は必ずしも連続とは限らない. T が連続であるとした場合, 空間の条件を弱められる. 詳しくは, 4 章の注を参照せよ.

3 主結果

まず, 不動点定理を用いやすくするために, 境界値問題 (1) を書き換える. 証明は, 4 章を参照せよ.

補助定理. f は $I\times R\times R$ から R への連続写像とする. 境界値問題 (1) をみたす $y\in C^4(I,R)$ の存在と方程式

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s),u(s))ds \tag{2}$$

をみたす $u\in C^2(I,R)$ の存在は同値である. ただし,

$$y(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)ds \tag{3}$$

である. また, 関数 G は

$$G(t,s)=\begin{cases}(t-1)s, & 0\le s\le t\le 1,\\ (s-1)t, & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$$

である.

この補助定理より, 境界値問題 (1) の解の存在を

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s),u(s))ds$$

で定められる T の不動点の存在へと問題を置き換えられる.

境界値問題 (1) に対する下側解 y とは

$$y''''(t)\le f(t,\alpha(t),y''(t)),\quad t\in I$$

をみたすものとする. 境界値問題 (1) に対して, ある条件をみたす下側解を仮定すれば, (1) の解はただひとつ存在する. 実際, 次が成り立つ.

定理 3. f は $I\times R\times R$ から R への連続写像とする. さらに, ある $0<\mu<8$ が存在して, $y_1\ge y_2$ および $u_1\ge u_2$ をみたす任意の y_1,y_2,u_1,u_2 に対して

$$0<f(t,y_1,u_1)-f(t,y_2,u_2)\le\mu(u_2-u_2)$$

が任意の $t\in I$ に対して成り立つとする. このとき

$$\int_0^1\int_0^1 f(s,y(s),y''(s))dsdt\le -y'''(0)$$

をみたす下側解 y が存在するならば, 境界値問題 (1) の解はただひとつ存在する.

証明. $X = C^2(I,R)$ とおく. 任意の $x,\, y \in X$ に対して, $x \le y$ を

$$\text{任意の } t \in [0,1] \text{ に対して } x(t) \le y(t)$$

で定める. このとき, $(X, \le)$ は半順序集合となる. X の距離 d を任意の $x,\, y \in X$ に対して

$$d(x,\, y) = \sup_{t \in I} |x(t) - y(y)|$$

で定めるとき完備距離空間となる.

x に収束する単調非減少列 $\{x_n\} \subset X$ をとる. このとき, 任意の $t \in I$ に対して, $x_1(t) \le x_2(t) \le x_3(t) \le \cdots \le x_n(t) \le \cdots$ となる. 各 $t \in I$ に対して $\{x_n(t)\}$ は上に有界な単調非減少実数列であるから, $x(t) = \sup_n x_n(t)$ である. よって $x_n(t) \le x(t)$ である. すなわち $x_n \le x$ を得る.

補助定理より, 方程式 (2) をみたす $u \in C^2(I,R)$ が一意に存在すればよい.

X から X への作用素 T を, $t \in I$ に対して

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, y(s), u(s)) ds$$

で定める. ここで, 関数 G は

$$G(t,s) = \begin{cases} (t-1)s, & 0 \le s \le t \le 1, \\ (s-1)t, & 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

である. 作用素 T は単調非減少である. 実際, $u_1 \ge u_2$ をみたす $u_1, u_2 \in X$ と任意の $t \in I$ に対して

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^1 G(t,s) u_1(s) ds \\ &\ge \int_0^1 G(t,s) u_2(s) ds = y_2(t) \end{aligned}$$

である. ここで $G(t,s) \ge 0$ に注意せよ. したがって, $f(t, y_1(t), u_1(t)) \le f(t, y_2(t), u_2(t))$ である. $Tu_1(t) \ge Tu_2(t)$ を得る.

次に, ある $k \in [0,1)$ が存在して, $u_1 \ge u_2$ となる任意の $u_1, u_2 \in X$ に対して $d(Tu_1(t), Tu_2(t)) \le kd(u_1(t), u_2(t))$ となるのをみる. $u_1, u_2 \in X$ を $u_1 \ge u_2$ をみたすものとする. $y_1 \ge y_2$ である. また

$$\begin{aligned} &d(Tu_2(t), Tu_1(t)) \\ &= \sup_{t \in I} |Tu_2(t) - Tu_1(t)| \\ &\le \sup_{t \in I} \int_0^1 G(t,s) \left(f(s, y_2(s), u_2(s)) \right. \\ &\quad \left. - f(s, y_2(s), u_1(s)) \right) ds \\ &\le \mu \sup_{t \in I} \int_0^1 G(t,s)(u_2(s) - u_1(s)) ds \\ &\le \mu d(u_2, u_1) \int_0^1 G(t,s) ds \\ &= \mu d(u_2, u_1) \left(\int_0^t (1-t) s ds + \int_t^1 (1-s) t ds \right) \\ &= \frac{\mu}{2} d(u_2, u_1) t(1-t) \\ &\le \frac{\mu}{8} d(u, v) \end{aligned}$$

が成り立つ. $\dfrac{\mu}{8} < 1$ であることに注意せよ.

$\alpha = y''$ とおく. $\alpha \le T\alpha$ を示す. 任意の $t \in I$ に対して

$$\alpha''(s) \le f(s, y(s), \alpha(s))$$

であるから

$$\alpha'(t) \le \alpha'(0) + \int_0^t f(s, y(s), \alpha(s)) ds$$

を得る. $\alpha(0) = 0$ であるから, 任意の $x \in I$ に対して

$$\alpha(x) \le \alpha'(0) x + \int_0^x \int_0^t f(s, y(s), \alpha(s)) ds dt$$

を得る.

ところで

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^t f(s, y(s), \alpha(s)) ds dt \\ &\quad \le \int_0^1 \int_0^1 f(s, y(s), \alpha(s)) ds dt \\ &\quad \le -\alpha'(0) \end{aligned}$$

であり

$$\alpha'(0) \le -\int_0^1 \int_0^t f(s, y(s), \alpha(s)) ds dt$$

である．よって, 任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\alpha(x) \\
&\le -x\int_0^1\int_0^t f(s,y(s),\alpha(s))dsdt \\
&\quad+\int_0^x\int_0^t f(s,y(s),\alpha(s))dsdt \\
&=\int_0^1 G(x,t)f(t,y(t),\alpha(t))dt \\
&=T\alpha(x)
\end{aligned}$$

となる．よって $\alpha \le T\alpha$ が成立する．

定理 2 より, T の不動点がただひとつ存在する．□

4 付録

この節では, 定理 1, 2 および補助定理の各証明を与える．

定理 1 の証明. $Tx_0 = x_0$ であるならば x_0 が不動点である．$Tx_0 \ne x_0$ であるとする．$Tx_0 \le x_0$ であり, T は単調非減少であるから

$$x_0 \le Tx_0 \le T^2x_0 \le \cdots \le T^nx_0 \le \cdots$$

である．任意の $n \in N$ に対して

$$d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \le k^n d(Tx_0, x_0) \qquad (4)$$

が成り立つ．数学的帰納法で証明する．$x_0 \le Tx_0$ より

$$d(T^2x_0, Tx_0) \le kd(Tx_0, x_0)$$

が成り立つ．よって, (4) が $n = 1$ で成り立つ．(4) が n で成り立つと仮定する．このとき $T^nx_0 \le T^{n+1}x_0$ より

$$\begin{aligned}
&d(T^{n+2}x_0, T^{n+1}x_0) \\
&\quad= d(T(T^{n+1}x_0), T(T^nx_0)) \\
&\quad\le k^n d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \\
&\quad\le k^{n+1} d(Tx_0, x_0)
\end{aligned}$$

である．よって, (4) が $n+1$ で成り立つ．以上より, (4) は任意の $n \in N$ で成り立つ．

$\{T^nx_0\}$ は Cauchy 列である．実際, $m > n$ のとき

$$\begin{aligned}
&d(T^mx_0, T^nx_0) \\
&\quad\le d(T^mx_0, T^{m-1}x_0) + d(T^mx_0, T^{m-1}x_0) \\
&\qquad+\cdots+d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \\
&\quad\le (k^{m-1}+k^{m-1}+\cdots+k^n)d(Tx_0, x_0) \\
&\quad= \frac{k^n-k^m}{1-k}d(Tx_0, x_0) \\
&\quad\le \frac{k^n}{1-k}d(Tx_0, x_0)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$n \to \infty$ のとき $d(T^mx_0, T^nx_0) \to 0$ である．X は完備であるから, ある $x \in X$ が存在して, $\lim_{n\to\infty} T^nx_0 = x$ である．

$Tx = x$ を示す．$\varepsilon > 0$ とする．$\{T^nx_0\}$ は x に収束するので, $\frac{\varepsilon}{2}$ に対して, ある $n_0 \in N$ が存在して $n \ge n_0$ をみたす任意の $n \in N$ に対して

$$d(T^nx_0, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

である．ところで, $T^nx_0 \to x$ より $T^nx_0 \le x$ が任意の $n \in N$ で成り立つ．よって, $n \ge n_0$ に対して

$$\begin{aligned}
d(Tx, x) &\le d(Tx, T^{n+1}x_0) + d(T^{n+1}x_0, x) \\
&\le kd(x, T^nx_0) + d(T^{n+1}x_0, x) \\
&\le d(x, T^nx_0) + d(T^{n+1}x_0, x) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

である．ε は任意の正数であるから $Tx = x$ を得る．□

注. 定理 1 において T が連続写像の場合, 空間の条件を弱められる．実際, 次が成り立つ．

定理 4. $(X, \le)$ は半順序集合とする．距離 d が存在して (X, d) は完備距離空間とする．T を X から X への単調非減少な連続写像とする．ある $k \in [0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $x \le y$ ならば $d(Tx, Ty) \le kd(x, y)$ をみたすとする．ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \le Tx_0$ をみたすとする．このとき T は不動点をもつ．

定理 4 の証明. $Tx = x$ を示す．(4) より

$$d(T(T^nx_0), T^nx_0) \le k^n d(Tx_0, x_0)$$

である．T は連続であるから, $n \to \infty$ のとき左辺は $d(Tx, x)$ に収束する．また, 右辺は 0 に収束する．よって, $d(Tx, x) = 0$ である．これより T は不動点である．□

定理 2 の証明. $y \in X$ が T の x 以外の他の不動点とする.

y と x が比較可能であるとする．すなわち, $y \leq x$ または $y \geq x$ が成り立つとする．このとき, $T^n y = y$ は 各 $n \in N$ に対して $T^n x = x$ と比較可能である．よって

$$d(x, y) = d(T^n x, T^n y) \leq k^n d(x, y)$$

である．$n \to \infty$ とすると $d(x, y) = 0$ を得る．よって, $x = y$ である.

y と x が比較可能でないとする．y と x の上界または下界 z が存在する．T が単調なため, 任意の $n \in N$ に対して $T^n z$ は $T^n y = y$ および $T^n x = x$ と比較可能である．よって

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(T^n x, T^n y) \\ &\leq d(T^n x, T^n z) + d(T^n z, T^n y) \\ &\leq k^n d(x, z) + k^n d(z, y) \end{aligned}$$

である．$n \to \infty$ とすると $d(x, y) = 0$ を得る．よって, $x = y$ である.

したがって, T の不動点は存在するとしても, ただひとつである．□

補助定理の証明. 方程式 (1) より

$$\int_0^t y''''(s) ds = \int_0^t f(s, y(s), y''(s)) ds$$

である．このとき

$$y'''(t) = y'''(0) + \int_0^t f(s, y(s), y''(s)) ds$$

を得る．また

$$\begin{aligned} &y''(x) - y''(0) \\ &\quad = y'''(0)x + \int_0^x \int_0^t f(s, y(s), y''(s)) ds dt \end{aligned}$$

である．ところで

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(t \int_0^t f(s, y(s), y''(s)) ds \right) \\ &= \int_0^t f(s, y(s), y''(s)) ds + t f(t, y(t), y''(t)) \end{aligned}$$

であり, さらに $y''(0) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} &y''(x) \\ &= y'''(0)x + \int_0^x \frac{d}{dt}\left(t \int_0^t f(s, y(s), y''(s)) ds \right) dt \\ &\quad - \int_0^x t f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &= y'''(0)x + x \int_0^x f(s, y(s), y''(s)) ds \\ &\quad - \int_0^x t f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &= y'''(0)x + \int_0^x (x - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \end{aligned}$$

となる．ここで $x = 1$ とすると

$$\begin{aligned} &y''(1) \\ &\quad = y'''(0) + \int_0^1 (1 - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \end{aligned}$$

を得る．よって

$$y'''(0) = -\int_0^1 (1 - t) f(t, y(t), y''(t)) dt$$

である．このとき

$$\begin{aligned} &y''(x) \\ &= -x \int_0^1 (1 - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &\quad + \int_0^x (x - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &= -x \int_0^x (1 - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &\quad - x \int_x^1 (1 - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &\quad + \int_0^x (x - t) f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &= \int_0^x (x - 1) t f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &\quad + \int_x^1 (t - 1) x f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &= \int_0^1 G(x, t) f(t, y(t), y''(t)) dt \\ &= \int_0^1 G(x, t) f(t, y(t), u(t)) dt \end{aligned}$$

が成り立つ. 次に, $u(s) = y''(s)$ とする.

$$y'(t) - y'(0) = \int_0^x u(s)ds$$

であるから

$$y(x) - y(0) = y'(0)x + \int_0^x \int_0^t u(s)dsdt$$

となる. ところで

$$\frac{d}{dt}\left(t\int_0^t u(s)ds\right) = \int_0^t u(s)ds + tf(t)$$

であり, さらに $y(0) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} y(x) &= y'(0)x + \int_0^x \frac{d}{dt}\left(t\int_0^t u(s)ds\right)dt \\ &\quad - \int_0^x tu(t)dt \\ &= y'(0)x + x\int_0^x u(s)ds - \int_0^x tu(t)dt \\ &= y'(0)x + x\int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned}$$

となる. ここで $x = 1$ とすると

$$y'(0) = -\int_0^1 (1-t)u(t)dt$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} y(x) &= -x\int_0^1 (1-t)u(t)dt + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ &= -x\int_0^x (1-t)u(t)dt - x\int_x^1 (1-t)u(t)dt \\ &\quad + \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ &= \int_0^x (x-1)tu(t)dt + \int_x^1 (t-1)xu(t)dt \\ &= \int_0^1 G(x,t)u(t)dt \end{aligned}$$

が成り立つ.

逆は省略する. □

参考文献

[1] G. S. Lade V. Lakshmikantham and A. S. Vatsala, *Non-linear Differential Equations*, Pitman Boston, 1985.

[2] J. J. Nieto and L. R. Rodriguez, *Contractive Mapping Theorems in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations*, order **40** (2005), 223-239.

[3] A. C. M. Ran and M. C. B. Rurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. math. Soc **132** (1998), 1435–1443.

[4] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zannen, *Riesz Spaces*, North-Holland, 1971.

2013 年 2 月 28 日原稿受付
Received, February 28, 2013