連続可測作用素の可測不動点定理に関する一考察

Note on measurable fixed point theorems for continuous measurable operators

豊田昌史
Masashi Toyoda

玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Faculty of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

In this note we prove a measurable fixed point theorem for continuous random operator with closed convex values. This measurable fixed point theorem is related with Fan's fixed point theorem and Kakutani's fixed point theorem.

Keywords: Fixed point, random fixed point, measurable fixed point, set-valued mapping, measurable selection.

1　はじめに

連続可測作用素の可測不動点定理の証明には, Hausdorff 距離の性質 (命題 6) を利用した証明がよく知られている. 本ノートでは, この命題を用いずに下半連続性 (命題 5) から直接証明する方法を示す.

2　準備

X, Y を位相空間とし, T を X から 2^Y への写像とする. T が $x_0 \in X$ で上半連続 (upper semicontinuous) であるとは, Tx_0 を含む任意の開集合 V に対して, $x_0 \in U$ となるある開集合 U が存在して

$$Tx \subset V$$

が任意の $x \in U$ に対して成り立つときをいう. T が x_0 で下半連続 (lower semicontinuous) であるとは, $Tx_0 \cap V \neq \emptyset$ となる Y の任意の開集合 V に対して, $x_0 \in U$ となるある開集合 U が存在して

$$Tx \cap V \neq \emptyset$$

が任意の $x \in U$ に対して成り立つときをいう. T が x_0 で連続 (continuous) であるとは, T が x_0 で上半連続かつ下半連続であるときをいう. 上半連続性の特徴づけに命題 3, 4 がある. 下半連続性の特徴づけに命題 5 がある. また, 連続性の特徴づけに命題 6 がある. 5 節を参照せよ.

上半連続写像に関して, 次の不動点定理がある. 例えば [14] の 5.2 節を参照せよ.

Fan の不動点定理. *E を Banach 空間とし, X を E のコンパクト凸集合とする. T を X から 2^X への閉凸値上半連続写像とする. このとき, T は不動点をもつ.*

Ω をある集合とし, Σ を Ω の σ 代数 (σ−algebra) とする. すなわち, 次をみたす. (1) $\emptyset \in \Sigma$. (2) $A \in \Sigma$ ならば $A^C \in \Sigma$ である. (3) 任意の $n \in N$ に対して $A_n \in \Sigma$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ である. Σ の要素を可測集合 (measurable set) といい, (Ω, Σ) を可測空間 (measurable space) という.

(Ω, Σ) を可測空間とし, X を位相空間とする. F を Ω から $2^X \setminus \{\emptyset\}$ への写像とする. F が可測 (measurable) とは, X の任意の閉集合 C に対して

$$F^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \Sigma$$

となるときをいう. F が弱可測 (weakly measurable) とは, X の任意の開集合 G に対して $F^{-1}(G) \in \Sigma$ となるときをいう.

命題 1. (Ω,Σ) を可測空間とし, F を Ω から $2^X\setminus\{\emptyset\}$ への写像とする. このとき, X が完全正則で F が可測ならば F は弱可測である.

(Ω,Σ) を可測空間とし, X を位相空間とする. G を Ω から $2^X\setminus\{\emptyset\}$ への閉値可測写像とする. Ω から X への写像 φ が可測選択子 (measurable selection) であるとは, 任意の $\omega\in\Omega$ に対して

$$\varphi(\omega)\in G(\omega)$$

が成り立つときをいう.

可測選択子の存在に関して, 次の定理がある. 例えば [9] の定理 7.2 を参照せよ.

命題 2. (Ω,Σ) を可測空間とする. X を可分な完備距離空間とする. G を Ω から $2^X\setminus\{\emptyset\}$ への閉値可測写像とする. このとき, G は可測選択子をもつ.

(Ω,Σ) を可測空間とし, X を位相空間とする. M を X の部分空間とする. T を $\Omega\times X$ から 2^X への写像とする. T が可測作用素 (measurable operator) であるとは, 任意の $x\in M$ に対して $T(\cdot,x)$ が可測であるときをいう. また, 可測作用素が連続であるとは, 任意の $\omega\in\Omega$ に対して $T(\omega,\cdot)$ が連続であるときをいう. Ω から M への写像 φ が可測作用素 T の可測不動点であるとは, 任意の $\omega\in\Omega$ に対して

$$\varphi(\omega)\in T(\omega,\varphi(\omega))$$

が成り立つときをいう. 次節で, 可測不動点の存在定理を証明する.

3 可測不動点定理とその証明

本節では, 連続可測作用素の可測不動点定理を証明する. まずは, Hausdorff 距離の性質 (命題 6) を利用した証明を示す. その後, 下半連続性 (命題 5) から直接証明する方法を示す.

定理. (Ω,Σ) を可測空間, E を *Banach* 空間, X を E のコンパクト凸集合とする. T を $\Omega\times X$ から $2^X\setminus\{\emptyset\}$ への閉凸値連続可測作用素とする. このとき, T は Ω から X への可測不動点 φ をもつ. すなわち, 任意の $\omega\in\Omega$ に対して

$$\varphi(\omega)\in T(\omega,\varphi(\omega))$$

が成り立つ.

証明. Ω から $2^X\setminus\{\emptyset\}$ への作用素 F を

$$F(\omega)=\{x\in X\mid x\in T(\omega,x)\}\quad(\omega\in\Omega)$$

で定義する. このとき, Fan の不動点定理から $F(\omega)$ は空集合ではない.

G は閉値写像である. 実際, $\omega\in\Omega$ とし $\{x_n\}$ を $F(\omega)$ の点列で $x_n\to x$ をみたすものとする. このとき $x_n\in T(\omega,x_n)$ である. すなわち $(x_n,x_n)\in G(T(\omega,\cdot))$ である. $T(\omega,\cdot)$ は上半連続であるから, 命題 4 より

$$(x_n,x_n)\to(x,x)\in G(T(\omega,\cdot))$$

である. すなわち $x\in T(\omega,x)$ である. これは $x\in F(\omega)$ を表す.

X の任意の空でない閉集合 C に対して $L(C)$ を

$$L(C)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{x\in D_n}\left\{\omega\in\Omega\mid d(x,T(\omega,x))\le\frac{1}{n}\right\}$$

で定める. ここで,

$$D_n=\left\{x\in D\mid d(x,C)<\frac{1}{n}\right\},$$

$$d(x,C)=\inf\{d(x,y)\mid y\in C\}$$

および D は X の可算稠密部分集合である. このとき $F^{-1}(C)=L(C)$ である.

まず, $L(C)\subset F^{-1}(C)$ を示す. $\omega\in L(C)$ とする. このとき, 任意の n に対して $x_n\in D_n$ を

$$d(x_n,T(\omega,x_n))\le\frac{1}{n}$$

をみたすようにとる. X はコンパクトであるから, $\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_j}\}$ が存在する. $x_{n_j}\to x$ とする. C は閉集合であり, $d(x_n,T(\omega,x_n))\le\frac{1}{n}$ であるから, $x\in C$ である. 各 j に対して $z_{n_j}\in T(\omega,x_{n_j})$ を

$$d(x_{n_j},z_{n_j})=d(x_{n_j},T(\omega,x_{n_j}))$$

となるようにとる. このとき, $d(x_{n_j},T(\omega,x_{n_j}))\le\frac{1}{n_j}$ であるから, $\{z_{n_j}\}$ も x に収束する. T は上半連続であるから命題 3 より, $x\in T(\omega,x)$ である. よって

$$x\in T(\omega,x)\cap C$$

である. これは $\omega\in F^{-1}(C)$ を示す.

次に, $F^{-1}(C)\subset L(C)$ を示す. $\omega\in F^{-1}(\omega)$ とする. ある $x\in C$ が存在して $x\in T(\omega,x)$ である. $x\in X=\overline{D}$ であるから, ある点列

$\{x_k\} \subset D$ が存在して $x_k \to x$ である. T は連続であるから命題 6 より, 任意の n に対して, ある k_n が存在して

$$d(x_{k_n}, x) < \frac{1}{2n}$$

であり

$$H(T(\omega, x_{k_n}), T(\omega, x)) < \frac{1}{2n}$$

である. いま

$$\begin{aligned} & d(x_{k_n}, T(\omega, x_{k_n})) \\ & \leq d(x_{k_n}, x) + d(x, T(\omega, x_{k_n})) \\ & \leq d(x_{k_n}, x) + H(T(\omega, x), T(\omega, x_{k_n})) \\ & \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

であるから, $\omega \in L(C)$ である. よって $F^{-1}(C) \subset L(C)$ が示せた.

次に

$$\begin{aligned} & \left\{\omega \in \Omega \mid d(x, T(\omega, x)) \leq \frac{1}{n}\right\} \\ & = \left\{\omega \in \Omega \mid T(\omega, x) \cap B\left[x, \frac{1}{n}\right] \neq \emptyset\right\} \\ & = T(\cdot, x)^{-1}\left(B\left[x, \frac{1}{n}\right]\right) \in \Omega \end{aligned}$$

である. $L(C) \in \Omega$ であるから, 結局, $F^{-1}(C) \in \Omega$ も得る. F は可測である. 命題 1 より, F は弱可測である. 命題 2 より, ある可測選択子 φ が存在して, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\varphi(\omega) \subset F(\omega)$ である. φ は T の可測不動点である. □

次に, 命題 6 ではなく, 命題 5 から直接証明する方法を示す. 関係する部分の証明のみ示す.

$F^{-1}(C) \subset L(C)$ 部分の証明. $\omega \in F^{-1}(C)$ とする. このとき, ある $x \in C$ が存在して $x \in T(\omega, x)$ である. $x \in X = \overline{D}$ であるから, ある点列 $\{x_k\} \subset D$ が存在して $x_k \to x$ である. T は下半連続であるから, 命題 5 より, ある $\{x_k\}$ の部分列 $\{x_{k_j}\}$ と

$$y_{k_j} \in T(\omega, x_{k_j})$$

となる点列 $\{y_{k_j}\}$ が存在して $y_{k_j} \to x$ である. 任意の n に対して, ある j_n が存在して

$$d(x_{k_{j_n}}, x) < \frac{1}{2n}$$

および

$$d(y_{k_{j_n}}, x) < \frac{1}{2n}$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} & d(x_{k_{j_n}}, T(\omega, x_{k_{j_n}})) \\ & \leq d(x_{k_{j_n}}, x) + d(x, T(\omega, x_{k_{j_n}})) \\ & \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

であり, $\omega \in L(C)$ を得る. □

4 おわりに

2 つ述べる. 1 つは用語である. 可測不動点 (measurable fixed point) は, 通常, 多くの論文では「random fixed point」と呼ばれている. 同様に, 可測作用素 (measurable operator) は, 通常「random operator」と呼ばれている.

もう 1 つは残された問いである. 定理 3 の証明でもわかるように, 写像 F の定義には上半連続性しか要求されていない. $F^{-1}(C) \subset L(C)$ の部分の証明でのみ下半連続性が用いられている. そこで, 定理 3 の下半連続性をはずせないかという疑問が湧く. すなわち, Fan の不動点定理の可測的拡張定理は得られるのだろうか. この問いは未解決である.

5 付録

本節では, 定理の証明に必要な命題を与える. また, 命題 1 と 2 については, 完全を期するため証明を示す.

上半連続性の必要十分条件を与える. 例えば [14] の補助定理 5.2.7 を参照せよ.

命題 3. X を位相空間とする. Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. T を X から 2^Y への閉値写像とする. $x_0 \in X$ とする. このとき, T が上半連続であるための必要十分条件は

$$x_\alpha \to x_0,\ y_\alpha \in Tx_\alpha,\ y_\alpha \to y_0 \Longrightarrow y_0 \in Tx_0$$

が成り立つことである.

同じく, 上半連続性の必要十分条件を与える. 例えば [14] の補助定理 5.2.8 を参照せよ.

命題 4. X を位相空間, Y をコンパクト *Hausdorff* 空間とする. T を X から 2^Y への閉値写像とする. このとき, T が X で上半連続であるための必要十分条件は

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Tx,\ x \in X\}$$

が閉集合となることである.

下半連続性の必要十分条件を与える．例えば [10] の定理 8.6 を参照せよ．

命題 5. X, Y を距離空間とし，T を X から 2^Y への下半連続写像とする．$\{x_n\}$ を x_0 に収束する X の点列し，y_0 を $y_0 \in Tx_0$ となる Y の点とする．このとき，$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}$ と $y_{n_k} \in Tx_{n_k}$ となる Y の点列 $\{y_{n_k}\}$ が存在して，$y_{n_k} \to y_0$ となる．

連続性の必要十分条件を与える．例えば [10] の定理 8.7 を参照せよ．

命題 6. X を位相空間とし，Y を距離空間とする．T を X から 2^Y へのコンパクト値写像とする．このとき，T が連続であるための必要十分条件は，T を X から $K(Y)$ への写像としたときに連続となることである．ここで，$K(Y)$ は X のコンパクト集合全体である．$K(Y)$ の距離は *Hausdorff* の距離である．

命題 1 の証明. X は完全正則であるから，X から R への連続関数 f が存在して

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

である．G を X の開集合とする．自然数 n に対して X の部分集合 C_n を

$$C_n = \left\{ x \in X \mid f(x) \leq -\frac{1}{n} \text{ または } f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

で定める．このとき

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

である．よって

$$\begin{aligned} F^{-1}(C) &= \left\{ \omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset \right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap C_n \neq \emptyset \} \end{aligned}$$

を得る．C_n は閉集合であるから $F^{-1}(G)$ は可測である．よって F は弱可測である．□

命題 2 の証明. $\{x_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$ を X の稠密な可算集合とする． 以下，Ω から $2^X \setminus \{\emptyset\}$ へのある弱可測写像列を構成する． すなわち，任意の $\omega \in \Omega$ および $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$G_n(\omega)$ は閉集合であり，$G_{n-1}(\omega) \supset G_n(\omega)$, $diam(G_n(\omega)) \leq \frac{2}{n}$ をみたす $\{G_0, G_1, G_2, \ldots\}$ を構成する．$G_0 = G$ とする．いま $\{G_0, G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}\}$ の弱可側写像列で，任意の $\omega \in \Omega$ および $j = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ に対して $G_j(\omega)$ が閉集合で，$G_{j-1}(\omega) \supset G_j(\omega)$, $diam(G_j(\omega)) \leq \frac{2}{j}$ をみたすものが構成できたとする．$\{S(x_i, \frac{1}{n}) \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$ は X の開被覆であるから，任意の $\omega \in \Omega$ に対して

$$G_{n-1}(\omega) \cap S\left(x_{(n,\omega)}, \frac{1}{n} \right) \neq \emptyset$$

をみたす最少の自然数 $i_{(n,\omega)}$ が存在する．Ω から $2^X \setminus \emptyset$ への写像を

$$G_n(\omega) = \overline{G_{n-1}(\omega) \cap S\left(x_{(n,\omega)}, \frac{1}{n} \right)} \quad (\omega \in \Omega)$$

で定める． このとき，任意の $\omega \in \Omega$ および $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$G_n(\omega)$ は閉集合，$G_{n-1}(\omega) \supset G_n(\omega)$, $diam(G_n(\omega)) \leq \frac{2}{n}$ である．また V を X の開集合とする．このとき

$$\begin{aligned} & G_n^{-1}(V) \\ &= \{ \omega \in \Omega \mid G_n(\omega) \cap V \neq \emptyset \} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega \mid \overline{G_{n-1}(\omega) \cap S\left(x_{(n,\omega)}, \frac{1}{n} \right)} \cap V \neq \emptyset \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \Omega \mid G_{n-1}(\omega) \cap S\left(x_{(n,\omega)}, \frac{1}{n} \right) \cap V \neq \emptyset \right\} \\ &= G_{n-1}^{-1}\left(S\left(x_{(n,\omega)}, \frac{1}{n} \right) \cap V \right) \\ &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(G_{n-1}^{-1}\left(S\left(x_i, \frac{1}{n} \right) \cap V \right) \cap \{ \omega \mid i_{(n,\omega)} = i \} \right) \end{aligned}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} & \{ \omega \in \Omega \mid i_{(n,\omega)} = i \} \\ & \quad = G_{n-1}^{-1}\left(S\left(x_i, \frac{1}{n} \right) \right) \\ & \qquad \cap \left(\bigcup_{j=0}^{i-1} G_{n-1}^{-1}\left(S\left(x_j, \frac{1}{n} \right) \right) \right)^C \\ & \quad \in \Omega \end{aligned}$$

であるから，$G_n^{-1}(V) \in \Omega$ である．これより G_n は弱可側である．

X は完備であり, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\{G_n(\omega) \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ は X の閉減少集合列であるから,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(\omega)$$

は一点集合である. $\varphi(\omega)$ をその一点とする. このとき, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\{G_n(\omega)\}$ は $\varphi(\omega)$ に Hausdorff の距離で収束する. 実際, $G_{n-1}(\omega) \supset G_n(\omega)$ であるから, $\{H(G_n(\omega), \varphi(\omega))\}$ は下に有界な減少列である. これより, ある $b(\omega)$ が存在して $b(\omega) = \lim_{n\to\infty} H(G_n(\omega), \varphi(\omega)) \geq 0$ である. 任意の自然数 n に対して, ある $z_n \in G_n(\omega)$ が存在して

$$d(z_n, \varphi(\omega)) > b(\omega) - \frac{1}{n}$$

である. このとき $G_{n-1}(\omega) \supset G_n(\omega)$ より $\{z_n\}$ は Cauchy 列である. よって $\{z_n\}$ は $\varphi(\omega)$ に収束する. よって $b(\omega) = 0$ である. すなわち, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\lim_{n\to\infty} H(G_n(\omega), \varphi(\omega)) = 0$ である. これより φ が可測であることを得る. $G(\omega) \supset G_n(\omega)$ より, φ は G の可測選択子である. □

参考文献

[1] G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[2] T. D. Benavides, G. L. Acedo and H. K. Xu, *Random fixed points of set-valued operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 831–838.

[3] A. T. Bharucha-Reid, *Fixed point theorems in probabilistic analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 641–657.

[4] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part 1: General Theory*, John Wiley and Sons, 1988.

[5] C. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. **87** (1975), 53–72.

[6] S. Itoh, *Random fixed point theorems with an applications to random differential equations in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 261–273.

[7] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sé. Sci. Math. Astronom. Phys. **13** (1965), 397–403.

[8] T. C. Lin, *Some random approximations and random fixed point theorems for 1-set-contractive random operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1997), 515–521.

[9] 丸山徹, 均衡分析の数理, 日本経済新聞社, 1985.

[10] 丸山徹, 数理経済学の方法, 創文社, 1995.

[11] 宮寺功, 関数解析学, 理工学社, 1972.

[12] V. M. Sehgal and S. P. Singh, *On random approximations and a random fixed point theorem for set valued mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 91–94.

[13] N. Shahzad, *The random version of the Kirzbraun-Valentine extension theorem*, J. Math. Anal. Appl. **215** (1997), 147–153.

[14] 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[15] K. K. Tan and X. Z. Yuan, *Random fixed-point theorems and approximation in cones*, J. Math. Anal. Appl. **185** (1994), 378–390.

[16] K. K. Tan and X. Z. Yuan, *Random fixed point theorems and approximation*, Stoc. Anal. Appl. **15** (1997), 103–123.

[17] W. V. Petryshyn, *Fixed point theorems for various classes of 1-set-contractive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **182** (1973), 323–352.

[18] W. V. Petryshyn and P. M. Fitzpartrick, *Fixed-point theorems for multivalued noncompact inward maps*, J. Math. Anal. Appl. **46** (1974), 756–767.

[19] H. K. Xu, *Some random fixed point theorems for condensing and nonexpansive operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 395–400.

2013 年 3 月 1 日原稿受付
Received, March 1, 2013