Bourbaki-Kneser の不動点定理より得られる 3 つの定理

Three theorems proved by using the Bourbaki-Kneser fixed point theorem

川崎敏治 † 豊田昌史 ‡ 渡辺俊一 *
Toshiharu Kawasaki Masashi Toyoda Toshikazu Watanabe

† 日本大学工学部, 963–8642 福島県郡山市田村町徳定字中河原 1
College of Engineering, Nihon University,
1 Naka-gawara, Tokusada, Tamura-machi, Koriyama-shi, Fukushima 963–8642

‡ 玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Faculty of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

* 日本大学理工学部, 101–8308 東京都千代田区神田駿河台 1–8–14
College of Science and Technology, Nihon University,
1–8–14 Kanda-Surugadai, Chiyoda-ku, Tokyo 101–8308

Abstract

The purpose of the paper is to prove three theorems using the Bourbaki-Kneser fixed point thoerem. Three theorems are the Hahn-Banach theorems and the Mazur-Orlicz theorem in a partially ordered vector space.

Keywords: Fixed point, Hahn-Banach theorem, partially ordered vector space.

1 はじめに

本論文では, Bourbaki-Kneser の不動点定理を用いて, Hahn-Banach の定理およびそれに関連する定理を証明する．扱う定理は, Hahn-Banach 型の定理, Hahn-Banach の定理および Mazur-Orlicz の定理の 3 つである．

本論文の構成は以下となる．第 2 節では, 順序線形空間の基本性質および Bourbaki-Kneser の不動点定理 (定理 1) について述べる．第 3 節では, 主定理の証明で必要な補題について述べる．第 4 節では, まず, Bourbaki-Kneser の不動点定理を用いて, 鎖完備な順序線形空間における Hahn-Banach 型の定理 (定理 7) を示す．さらに, この定理を用いて, Dedekind 完備な順序線形空間における Hahn-Banach の定理 (定理 10) を証明する．最後に, Dedekind 完備な順序線形空間における Mazur-Orlicz の定理 (定理 11) を証明する．第 5 節では, 残された問題について述べる．

2 準備

空でない集合 E の 2 項関係 $\leq$ が順序であるとは, $x, y, z \in E$ に対して, 次の 3 つの条件をみたすときをいう．(1) $x \leq x$ である．(2) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$ である．(3) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ である．E と $\leq$ の対 $(E, \leq)$ を順序集合という．順序集合 $(E, \leq)$ の任意の要素 $x, y \in E$ に対して, $x \leq y$ または $x \geq y$ となるとき, $\leq$ を鎖または線形順序という．このとき, $(E, \leq)$ を線形順序集合または全順序集合という．以後, $(E, \leq)$ を単に E と省略する．

F を順序集合 E の部分集合とする．F の任意の要素 x に対して $x \leq a$ が成り立つとき, a を F の上界という．F の上界が存在するとき, F は上に有界であるという．F の任意の元 x に対して $b \leq b$ が成り立つとき, b を F の下界という．F の下界が存在するとき, F は下に有界であるという．F が上にも下にも有界であるとき, F は有界であるという．a が F の上界で $a \in F$ であるとき, a を F の最大要素とい

う．この a を $\max F$ とかく．b が F の下界で $b \in F$ であるとき, b を F の最小要素という．この b を $\min F$ とかく．F の上界の集合に最小要素があればそれを最小上界あるいは上限といい $\sup F$ とかく．F の下界の集合に最大要素があればそれを最大下界あるいは下限といい $\inf F$ とかく．

実線形空間 E が線形演算と両立する順序関係 $\leq$ をもつとき, すなわち $x, y, z \in E$ に対して次の2つの条件をみたすとき, E を順序線形空間であるという．(1) $x \leq y$ ならば $x + z \leq y + z$ である．(2) $x \leq y$ かつ α は非負実数ならば $\alpha x \leq \alpha y$ である．本論文では, 線形空間は実線形空間のみを考える．

順序集合 E が束であるとは, 任意の $x, y \in E$ に対して上限 $x \vee y$, 下限 $x \wedge y$ をもつときをいう．順序線形空間 E がその順序 $\leq$ について束であるとき, E を Riesz 空間, ベクトル束または束順序線形空間であるという．なお, 実数全体 R は通常の順序, 演算により Riesz 空間となる．以後, $\leqq$, $<$ は R の通常の順序をあらわす．一方 $\leq$ は順序集合や順序線形空間の順序とする．

E を順序集合とする．E の鎖が必ず下限をもつとき, E は完備 (complete) であるという．下に有界な E の鎖が必ず下限をもつとき, E は鎖完備 (chain complete) であるという．下に有界な E の空でない部分集合が必ず下限をもつとき, E は Dedekind 完備 (Dedekind complete) であるという．

完備な順序集合に対して, 次の不動点定理が知られている．

定理 1 (Bourbaki-Kneser の不動点定理)**.** E を空でない完備な順序集合とする．f を E から E への減少である関数, すなわち, 任意の $x \in E$ に対し $f(x) \leq x$ が成り立つとする．このとき f は不動点をもつ．

3　補題

本節では, 後に必要となる補題を証明する．

補題 2. *X を線形空間, E を鎖完備な順序線形空間とする．Z を空でない下に有界な E^X の鎖とする．このとき任意の $x \in X$ に対して $\inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ が存在する．さらに, $p \in E^X$ を任意の $x \in X$ に対して $p(x) = \inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ により定義したとき, $p = \inf Z$ であり, E^X は鎖完備である．*

Proof. $x \in X$ とする．Z を空でない鎖とする．このとき $\{h(x) \mid h \in Z\}$ も空でない鎖である．f を Z の下界とする．任意の $h \in Z$ に対し $f(x) \leq h(x)$ であり，$\{h(x) \mid h \in Z\}$ は下から有界である．したがって, E は鎖完備であるから $\inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ が存在する．$p \in E^X$ を任意の $x \in X$ に対して $p(x) = \inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ により定義する．このとき任意の $h \in Z$ に対して $p \leq h$, すなわち p は Z の下界である．q を Z の下界とすると．任意の $x \in X$ に対して $q(x) \leq h(x)$ で $h \in Z$ となるから, $q(x)$ は, 任意の $x \in X$ に対して $\{h(x) \mid h \in Z\}$ の下界である．したがって, 任意の $x \in X$ に対して $q(x) \leq \inf\{h(x) \mid h \in Z\} = p(x)$ である．よって $p = \inf Z$ が成り立つ．□

鎖完備な順序線形空間における補題 2 と同様のことが, Dedekind 完備な空間に対しても成り立つ．

補題 3. *X を線形空間, E を Dedekind 完備な順序線形空間とする．Z は空でない下に有界な E^X の部分集合とする．このとき任意の $x \in X$ に対して $\inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ が存在する．さらに, $p \in E^X$ を任意の $x \in X$ に対して $p(x) = \inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ により定義したとき, $p = \inf Z$ であり, E^X は Dedekind 完備である．*

補題 4. *X, E, E^X, Z, p を補題 2 と同様とする．次を仮定する．*

(1) 任意の $h \in Z$, $x \in X$, $\alpha > 0$ に対して, $h' \in Z$ が存在し, $h(\alpha x) = \alpha h'(x)$ である．

(2) $p(0) = 0$.

(3) 任意の $h_1, h_2 \in Z$, $x, y \in X$ に対して, $h \in Z$ が存在し, $h(x+y) \leq h_1(x) + h_2(y)$ である．

このとき p は劣線形である．すなわち, 次が成り立つ．

(S1) 任意の $x, y \in X$ に対して, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ である．

(S2) 任意の $x \in X$ と任意の $\alpha \geqq 0$ に対して, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ である．

Proof. $x \in X$, $\alpha > 0$ とする．(1) より $\{h(\alpha x) \mid h \in Z\} \subset \{\alpha h'(x) \mid h' \in Z\}$ である．$\alpha x \in X$

と $1/\alpha > 0$ より, (1) から, 任意の $h' \in Z$ に対して $h \in Z$ が存在し

$$\alpha h'(x) = \alpha h'\left(\frac{1}{\alpha}\alpha x\right) = \alpha\frac{1}{\alpha}h(\alpha x) = h(\alpha x)$$

をみたす．よって $\{h(\alpha x) \mid h \in Z\} = \{\alpha h'(x) \mid h' \in Z\}$ が成り立つ．これより

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \inf\{h(\alpha x) \mid h \in Z\} \\ &= \inf\{\alpha h'(x) \mid h' \in Z\} \\ &= \alpha \inf\{h'(x) \mid h' \in Z\} = \alpha p(x) \end{aligned}$$

を得る．さらに, (2) から $p(0x) = p(0) = 0 = 0p(x)$ が成り立つ．したがって (S2) をみたす．

$x, y \in X$ とする．(3) より, 任意の $h_1, h_2 \in Z$ に対して, $h \in Z$ が存在し $h(x+y) \leq h_1(x) + h_2(y)$ をみたす．よって任意の $h_1, h_2 \in Z$ に対して

$$p(x+y) \leq h_1(x) + h_2(y)$$

を得る． これより, 任意の $h_2 \in Z$ に対して $p(x+y) - h_2(y)$ は $\{h(x) \mid h \in Z\}$ の下界である．したがって, 任意の $h_2 \in Z$ に対して

$$p(x+y) - h_2(y) \leq p(x)$$

を得る．このことから $p(x+y) - p(x)$ は $\{h(y) \mid h \in Z\}$ の下界となる．よって, $p(x+y) - p(x) \leq p(y)$ を得る．したがって (S1) をみたす．□

Dedekind 完備な順序線形空間に対しても, 同様に次を得る．

補題 5. *X, E, E^X, Z, p を補題 3 と同様とする．次を仮定する．*

(1) 任意の $h \in Z$, $x \in X$, $\alpha > 0$ に対して, $h' \in Z$ が存在し, $h(\alpha x) = \alpha h'(x)$ である．

(2) $p(0) = 0$.

(3) 任意の $h_1, h_2 \in Z$, $x, y \in X$ に対して, $h \in Z$ が存在し, $h(x+y) \leq h_1(x) + h_2(y)$ である．

このとき p は劣線形である．

4　主結果

まず, 次を示す．

補題 6. *X を線形空間, E を鎖完備な順序線形空間とする．h を X から E への劣線形写像とする．$y \in X$ とする．X から E への写像 ϕ を任意の $x \in X$ に対して*

$$\phi(x) = \inf\{h(x+ty) - h(ty) \mid t \geqq 0\}$$

で定義する． このとき ϕ は劣線形で, X において $h^* \leq \phi \leq h$ が成り立つ． ここで, X から E への写像 h^* は, 任意の $x \in X$ に対して $h^*(x) = -h(-x)$ で定められる．

Proof. 任意の $x \in X$ と $t \geqq 0$ に対して, $\tau_t(x) = h(x+ty) - h(ty)$ とおく． このとき $Z = \{\tau_t \mid t \geq 0\}$ は空でない鎖で E^X において下に有界である．実際, $h = \tau_0 \in Z$ より, Z は空ではない．$s \leqq t$ とする．このとき任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} &\tau_s(x) - \tau_t(x) \\ &= h(x+sy) - h(sy) - (h(x+ty) - h(ty)) \\ &= h(x+sy) + (h(ty) - h(sy)) - h(x+ty) \\ &= h(x+sy) + (t-s)h(y) - h(x+ty) \\ &= h(x+sy) + h((t-s)y) - h(x+ty) \\ &\geq h(x+sy+(t-s)y) - h(x+ty) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．よって, Z は E^X での鎖になっている．任意の $x \in X$ および $t \geqq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \tau_t(x) =& h(x+ty) - h(ty) \\ &\geq h(ty) - h(-x) - h(ty) \\ &= -h(-x) = h^*(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

であり, Z の下界である． よって Z は E^X において下から有界である．補題 2 から $\phi(x) = \inf\{h(x) \mid h \in Z\}$ は定義可能である．

次に, 補題 4 の (1), (2), (3) が成り立つことを示す．

(1) $t \geqq 0$, $x \in X$, $\alpha > 0$ とする．このとき

$$\begin{aligned} &\tau_t(\alpha x) \\ &= h(\alpha x + ty) - h(ty) \\ &= \alpha\left(h\left(x + \frac{t}{\alpha}y\right) - h\left(\frac{t}{\alpha}y\right)\right) \\ &= \alpha\tau_{\frac{t}{\alpha}}(x) \end{aligned}$$

を得る．よって, 補題 4 の (1) が成り立つ．

(2) $\phi(0) = \inf\{0 \mid t \geqq 0\} = 0$ であることから, 補題 4 の (2) が成立する．

(3) $t_1, t_2 \geqq 0$, $x_1, x_2 \in X$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
&\tau_{t_1+t_2}(x_1+x_2)\\
&= h(x_1+x_2+(t_1+t_2)y) - h((t_1+t_2)y)\\
&\le h(x_1+t_1y) + h(x_2+t_2y) - (t_1+t_2)h(y)\\
&= h(x_1+t_1y) - h(t_1y) + h(x_2+t_2y) - h(t_2y)\\
&= \tau_{t_1}(x_1) + \tau_{t_2}(x_2)
\end{aligned}$$

を得る．よって, 補題 4 の (3) が成り立つ．したがって, 補題 4 より ϕ は劣線形である．

最後に, $\phi \le h$ はよい．この不等式と (4.1) から X において $h^* \le \phi \le h$ が成り立つ．□

定理 1 と補題 6 より, 以下の鎖完備な順序線形空間における Hahn-Banach 型の定理を得る．

定理 7 (Hahn-Banach 型の定理)**.** *X を線形空間, E を鎖完備な順序線形空間とする．f を X から E への劣線形写像とする．このとき X から E への線形写像 g が存在し X において $g \le f$ が成り立つ.*

Proof. Y を

$$Y = \{h \in E^X \mid h \text{ は劣線形}, f^* \le h \le f\}$$

で定義される E^X の部分集合とする．ここで, f^* は $f^*(x) = -f(-x)$ $(x \in X)$ であるとする．このとき $f \in Y$ であるから, Y は空でない．また, Y は完備である．実際, $Z \subset Y$ を空でない鎖とする．任意の $h \in Z$ に対し, $f^* \le h$ であるから, Z は下に有界である．補題 2 より $\inf Z \in E^X$ が存在する．このとき $\inf Z \in Y$ である．実際, 補題 4 より, $\inf Z$ は劣線形写像である．また, $f^* \le h \le f$ より, 任意の $h \in Z$ に対して $f^* \le \inf Z \le f$ を得る．よって Y は完備である．さらに Y は最小要素をもつ．実際, Y が最小要素をもたないとする．このとき, 任意の $h \in Y$ に対して $Th \in Y$ が存在し $Th \le h$ および $Th \ne h$ をみたす．写像 T は減少であるから, Bourbaki-Kneser の不動点定理 (定理 1) より

$$Th_0 = h_0$$

をみたす $h_0 \in Y$ が存在する．これは Y が最小要素をもたないことに矛盾する．よって, Y は最小要素をもつ．

g を Y の最小要素とする．$x \in X$ とする．ϕ を任意の $z \in X$ に対して

$$\phi(z) = \inf\{g(z+tx) - g(tx) \mid t \geqq 0\}$$

で定義される X から E への写像とする．補題 6 より, ϕ は劣線形写像であり $\phi \le g$ である．さらに $\phi \in Y$ が成り立つ．実際, $g \in Y$ から, $g \le f$ を得る．このとき $\phi \le g \le f$ が成り立つ．また

$$g^*(z) = -g(-z) \le g(z+tx) - g(tx)$$

であるから, 任意の $z \in X$ と $t \geqq 0$ に対して $g^* \le \phi$ を得る．任意の $z \in X$ に対して $f(-z) \ge g(-z)$ であることから, 任意の $z \in X$ に対して $-f(-x) \le -g(-z)$ を得る．このとき $f^* \le g^*$ を得る．したがって $f^* \le g^* \le \phi \le g \le f$ を得る．このことから $\phi \in Y$ が成り立つ．

g は最小であることから, $\phi = g$ を得る．このとき

$$\begin{aligned}
g(-x) &= \phi(-x)\\
&= \inf\{g(-x+tx) - g(tx) \mid t \geqq 0\}\\
&\le g(0) - g(x) = -g(x)
\end{aligned}$$

である．よって, $g(x) + g(-x) \le 0$ を得る．任意の $x, z \in X$ に対して

$$g(-x) \le -g(x), \quad g(-z) \le -g(z)$$

が成り立つ．g は劣線形写像であり $0 = g(0) \le g(x+z) + g(-x-z)$ であることから

$$\begin{aligned}
-g(x+z) &\le g(-x-z)\\
&\le g(-x) + g(-z)\\
&\le -g(x) - g(z)
\end{aligned}$$

を得る．したがって $g(x)+g(z) \le g(x+z)$ が成り立つ．g は劣線形写像より, 任意の $x, z \in X$ に対して $g(x+z) \le g(x) + g(z)$ を得る．したがって, 任意の $x, z \in X$ に対して

$$g(x+z) = g(x) + g(z)$$

を得る．

また, $x \in X$, $\alpha > 0$ とする．このとき

$$0 = g(\alpha x - \alpha x) = \alpha g(x) + g(-\alpha x)$$

であることから, $g(-\alpha x) = -\alpha g(x)$ を得る．したがって, 任意の実数 α に対して

$$g(\alpha x) = \alpha g(x)$$

が成り立つ．

以上のことから, g は劣線形写像である．ゆえに, X から E への劣線形写像で X において $g \le f$ をみたす g が存在する．□

順序線形空間が Dedekind 完備であるならば鎖完備である．よって, 以下を得る．

系 **8** (Hahn-Banach 型の定理)**.** X を線形空間, E を Dedekind 完備な順序線形空間とする．f を X から E への劣線形写像とする．このとき X から E への線形写像 g が存在し X において $g \leq f$ をみたす．

Hahn-Banach の定理を得るために, 以下の補題を示す．

補題 **9.** X を線形空間, E を Dedekind 完備な順序線形空間とする．p を X から E への劣線形写像とする．K を X の空でない凸集合とする．q を K から E への凹写像とし, さらに K において $q \leq p$ をみたすとする．また, 任意の $x \in X$ に対して

$$\phi(x) = \inf\{p(x+ty) - tq(y) \mid t \geqq 0,\ y \in K\}$$

とする．このとき ϕ は劣線形写像で X において $\phi \leq p$ をみたす．さらに, g を X から E への線形写像としたとき, 次は同値である．(1) X において $g \leq \phi$ である．(2) X において $g \leq p$ であり, また K において $q \leq g$ である．

Proof. $Z = \{\tau_{t,y} \mid t \geqq 0,\ y \in K\}$ とする．ここで $\tau_{t,y}$ を, 任意の $x \in X$ に対して

$$\tau_{t,y}(x) = p(x+ty) - tq(y)$$

で定める．任意の $\tau_{t,y} \in Z$ と $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\tau_{t,y}(x) &= p(x+ty) - tq(y)\\ &\geq p(ty) - p(-x) - tq(y)\\ &\geq -p(-x)\end{aligned}$$

より, $\phi(x) \geq -p(-x)$ である．また, Z は E^X において下に有界である．E は Dedekind 完備であるから, 補題 3 により ϕ は定義可能である．

補題 5 の (1), (2), (3) が成り立つことを示す．

(1) $\tau_{t,y} \in Z$ とする．任意の $x \in X$ と $\alpha > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\tau_{t,y}(\alpha x) &= p(\alpha x + ty) - tq(y)\\ &= \alpha\left(p\left(x + \frac{t}{\alpha}y\right) - \frac{t}{\alpha}q(y)\right)\\ &= \alpha\tau_{\frac{t}{\alpha},y}(x)\end{aligned}$$

である．

(2) ϕ の定義より, 任意の $x \in X$ に対して, $\phi(x) \leq p(x)$ を得る．よって $\phi(0) \leq p(0) = 0$ が成り立つ．K において $p \geq q$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \inf\{p(ty) - tq(y) \mid t \geqq 0,\ y \in K\}\\ &= \inf\{tp(y) - tq(y) \mid t \geqq 0,\ y \in K\} \geq 0\end{aligned}$$

である．したがって $\phi(0) = 0$ を得る．

(3) $\tau_{t_1,y_1}, \tau_{t_2,y_2} \in Z$ は $t_1 + t_2 \neq 0$ をみたすとする．$x_1, x_2 \in X$ とする．K は凸集合であり, q は凹写像であるから

$$\begin{aligned}&\tau_{t_1,y_1}(x_1) + \tau_{t_2,y_2}(x_2)\\ &= p(x_1 + t_1y_1) - t_1q(y_1)\\ &\qquad + p(x_2 + t_2y_2) - t_2q(y_2)\\ &\geq p(x_1 + x_2 + (t_1+t_2)w) - (t_1+t_2)q(w)\\ &= \tau_{t_1+t_2,w}(x_1+x_2)\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$w = \frac{1}{t_1+t_2}(t_1y_1 + t_2y_2) \in K$$

である．p は劣線形であるから

$$\begin{aligned}&\tau_{0,w}(x_1+x_2)\\ &= p(x_1+x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)\\ &= \tau_{0,y_1}(x_1) + \tau_{0,y_2}(x_2)\end{aligned}$$

を得る．したがって, 任意の $x_1, x_2 \in X$ と $t_1, t_2 \geqq 0$ に対して, $\tau_{t_1,y_1}(x_1) + \tau_{t_2,y_2}(x_2) \geq \tau_{t_1+t_2,w}(x_1+x_2)$ を得る．補題 5 より, ϕ は劣線形写像である．さらに, ϕ の定義から, X において $\phi \leq p$ が成り立つ．

g を X から E への線形写像とする．X で $g \leq \phi$ をみたすとする．$\phi \leq p$ が成り立つから, $g \leq p$ を得る．さらに, 任意の $y \in K$ に対して

$$\begin{aligned}-g(y) = g(-y) &\leq \phi(-y)\\ &\leq p(-y+y) - q(y)\\ &= -q(y)\end{aligned}$$

であることから, K において $g \geq q$ が成り立つ．逆に X において $g \leq p$ とし, また K において $q \leq g$ が成り立つとする．任意の $x \in X$, $y \in K$, $t \geqq 0$ に対して

$$g(x) = g(x+ty) - tg(y) \leq p(x+ty) - tq(y)$$

を得る．これより X において $g \leq \phi$ が成り立つ．□

系 8 と補題 9 より, 次の Dedekind 完備な順序線形空間における Hahn-Banach の定理を得る．

定理 10 (Hahn-Banach の定理)**.** X を線形空間, E を Dedekind 完備な順序線形空間とする. p を X から E への劣線形写像とする. Y を X の空でない部分空間とする. q を Y から E への線形写像で, Y において $q \leq p$ が成り立つとする. このとき X から E への線形写像 g が存在し, X において $g \leq f$ が成り立ち, また Y において $g = q$ が成り立つ.

Proof. ϕ を, 任意の $x \in X$ に対し,

$$\phi(x) = \inf\{p(x+ty) - tq(y) \mid t \geqq 0,\ y \in K\}$$

で定義される X から E への写像とする. 補題 9 より, ϕ は劣線形写像で, X において $\phi \leq p$ が成り立つ. 系 8 より, 線形写像 g が存在し, X において $g \leq \phi$ が成り立つ. このとき補題 9 において $K = Y$ とおくと, X において $g \leq p$ が成り立ち, さらに Y において $q \leq g$ が成り立つ. Y は部分空間であるから, 任意の $y \in Y$ に対し, $-y \in Y$ である. このとき $q(-y) \leq g(-y)$ である. q と g は線形写像より, $-q(y) \leq -g(y)$ である. このとき Y において $g \leq q$ が成り立つ. よって, Y において $g = q$ が成り立つ. □

さらに, 次の Dedekind 完備な順序線形空間における Mazur-Orlicz の定理を得る.

定理 11 (Mazur-Orlicz の定理)**.** X を線形空間, E を Dedekind 完備な順序線形空間とする. p を X から E への劣線形写像とする. $\{x_j \mid j \in J\}$ を X の部分集合とし, $\{y_j \mid j \in J\}$ を E の部分集合とする. このとき, 次は同値である.

(1) ある X から E への線形写像 g が存在して X において $g \leq p$ をみたし, 任意の $j \in J$ に対して $y_j \leq g(x_j)$ をみたす.

(2) 任意の n 個の非負実数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ および J の元 $j_1, j_2, \ldots, j_n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \leq p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right)$$

をみたす.

Proof. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ とする. このとき, (1) より

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(x_{j_i}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) \leq p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right)$$

をみたす. よって (2) が成り立つ.

(2) より, 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} &\leq p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) \\ &= p\left(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i} - x\right) \\ &\leq p\left(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) + p(-x)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって

$$-p(-x) \leq p\left(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i}$$

が, 任意の自然数 n および $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ に対して成り立つ. 任意の $x \in X$ に対して $p_0(x)$ を

$$p_0(x) = \inf\left\{p\left(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \mid n \in N,\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n \geq 0,\ j_1, j_2, \ldots, j_n \in J\right\}$$

で定める. ここで補題 3 より, p_0 は定義可能である. また, p が劣線形であることから, p_0 もまた劣線形である. 実際, $\alpha > 0$, $x \in X$ とする. このとき p は劣線形であるから

$$\begin{aligned}&p\left(\alpha x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \\ &= p\left(\alpha\left(x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_{j_i}\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \\ &= \alpha p\left(x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_{j_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \\ &= \alpha\left(p\left(x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_{j_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} y_{j_i}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, $p_0(\alpha x) = \alpha p_0(x)$ である. これは $\alpha = 0$ でも成り立つ. 実際,

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = 0$ ととれば, $p_0(0) = p(0) = 0$ となる. よって, 任意の非負実数 α および $x \in X$ に対して

$$p_0(\alpha x) = \alpha p_0(x)$$

が成り立つ. また, $x_1, x_2 \in X$ とする. さらに, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geqq 0$, $j_1, j_2, \ldots, j_n \in J$ および $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \geqq 0$, $j_{n+1}, j_{n+2}, \ldots, j_{n+m} \in J$ とする. このとき, p が劣線形であるから

$$\begin{aligned}
&p\left(x_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} \\
&\quad + p\left(x_2 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{j_{n+i}}\right) - \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_{j_{n+i}} \\
&\geq p\left(x_1 + x_2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{j_i} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_{j_{n+i}}\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{j_i} - \sum_{i=1}^{m} \beta_i y_{j_{n+i}} \\
&\geq p_0(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

である. よって, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$p_0(x_1) + p(x_2) \geq p_0(x_1 + x_2)$$

が成り立つ. ゆえに, 系 8 より, ある X から E への線形写像 g が存在して $g \leq p_0$ が X において成り立つ. また $p_0(-x_j) \leq p(-x_j + x_j) - y_j = -y_j$ であるから $y_j \leq -p_0(-x_j) \leq -g(-x_j) = g(x_j)$ が成り立つ. 任意の $x \in X$ に対して $p_0(x) \leq p(x)$ であるから, 任意の $x \in X$ に対して

$$g(x) \leq p(x)$$

が成り立つ. よって, (1) を得る. □

5 残された問題

本節では, 残された問題について述べる. 少なくとも以下の 2 つの問題が未解決である.

(1) [5] に以下の定理 (Hahn-Banach exact approximation property) が述べられている. この定理を, 本論文と同様に定理 1 から証明をできるのではないか. 残された問題である.

定理. *X を線形空間, E を鎖完備な順序線形空間とする. f を X から E への劣線形写像とする. $y \in X$ とする. このとき, X から E への線形写像 g が存在し, X において $g \leq f$ が成り立ち, また, $g(y) = f(y)$ をみたす.*

(2) 順序線形空間における完備性は, 本論文で扱った鎖完備, Dedekind 完備のほかに, 単調完備など他の概念も知られている. これらの完備性における Hahn-Banach 型の定理や Hahn-Banach の定理を証明することはできないか. 残された問題である.

参考文献

[1] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, second edition, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[2] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1940.

[3] R. Cristescu, *Topological vector spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[4] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, second edition, Cambridge University Press, New York, 2002.

[5] M. M. Fel'dman, *Sufficient conditions for the existence of supporting operators for sublinear operators*, Sibirsk. Mat. Ž. **16** (1975), 132–138. (Russian).

[6] N. Hirano, H. Komiya and W. Takahashi, *A generalization of the Hahn-Banach theorem*, J. Math. Anal. Appl. **88** (1982), 333–340.

[7] A. D. Ioffe, *A new proof of the equivalence of the Hahn-Banach extension and the least upper bound properties*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 385–369.

[8] S. Kakutani, *Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **14** (1938), 242–245.

[9] T. Kawasaki, M. Toyoda, T. Watanabe, *Note on a fixed point theorem in an ordered set*, Memoirs of The Faculty of Engineering, Tamagawa University, **45** (2010), 92–99.

[10] W. A. Kirk, *Fixed point theory: A brief survey*, Universidas de Los Andes, Mérida, 1990.

[11] H. Kneser, *Eine direkte Ableitung des Zornschen Lemmas aus dem Auswahlaxiom*, Math. Z. **53** (1950), 110–113.

[12] T. C. Lim, *On minimal (maximal) common fixed points of a commuting family of decreasing (increasing) maps*, Differential and Difference Equations and Applications (2006), 683–684.

[13] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zannen, *Riesz spaces I*, North Holland, Amsterdam, 1971.

[14] K. Masuda ed., *Handbook of Applied Analysis*, Springer-Verlag, 2010 (in Japanese).

[15] P. M. Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[16] H. Tanabe, *Functional Analysis*, Jikkyo Shuppan, 1987 (in Japanese).

[17] A. C. Zannen, *Riesz spaces II*, North Holland, Amsterdam, 1984.

2012 年 1 月 31 日原稿受付
Received, January 1, 2012