3PSK 信号の accessible information に関する一考察

A study on the accessible information of 3 Phase Shift Keyed signal

大崎正雄

Masao Osaki

玉川大学工学部ソフトウェアサイエンス学科, 194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
College of Engineering, Tamagawa University,
6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610

Abstract

Here we give a brief study on the derivation of accessible information of 3 Phase Shift Keyed signal in coherent states. Especially, reduction in the domain of variables to be optimized is carried out. It will improve the accuracy or a time of numerical analysis.

Keywords: Quantum information theory, Accessible information.

1 はじめに

信号量子状態とその生起確率が決められた条件下で，検出過程（決定作用素）の最適化によって得られる最大相互情報量を accessible information : $I_{\rm ac}$ と呼ぶ．本稿では 3 元複素対称信号である，コヒーレント状態から成る 3 元位相変調 (3PSK) 信号の $I_{\rm ac}$ 導出について考察を行う．具体的には数値解析による導出過程に現れる最適化パラメータの定義域の縮減を理論的に行う．その結果は最適解導出にかかる時間の短縮，もしくは解の精度向上に貢献する．

2 信号量子状態とその表現

本稿で扱う 3PSK 信号は 3 元複素対称信号である．一般にコヒーレント状態は無限次元ヒルベルト空間のベクトルであり，3PSK 信号の量子状態ベクトルは次式で表される．

$$|f_1\rangle = |\alpha\rangle, \quad |f_2\rangle = |\alpha \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\rangle, \quad |f_3\rangle = |\alpha \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\rangle. \tag{1}$$

ここで α は実数とする．これらの量子状態はユニタリー作用素 $\hat{V}(=\exp[2\pi\mathrm{i}\hat{n}/3])$ と共に以下の対称性を有する．

$$|f_i\rangle = \hat{V}^{i-j}|f_j\rangle, \quad \hat{V}^3 = \hat{I}, \tag{2}$$

ただし，$\hat{n}(=\hat{a}^\dagger\hat{a})$ は光子数作用素を表す．また $\hat{V}^3 = \hat{I}$ の性質から信号量子状態の対称性は「3 重対称」とも呼ばれる．

次に量子状態ベクトルのグラム行列を考える．

$$[\langle f_i|f_j\rangle] = \begin{bmatrix} 1 & \kappa & \kappa^* \\ \kappa^* & 1 & \kappa \\ \kappa & \kappa^* & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

ここで κ は内積を表し，信号光子数 $n_{\rm s}$ $(=|\alpha|^2)$ を用いて次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \kappa &= K_{\rm c} + \mathrm{i}K_{\rm s} \\ &= \exp\left[-\frac{3n_{\rm s}}{2}\right]\cos\left[\frac{\sqrt{3}n_{\rm s}}{2}\right] \\ &\quad +\mathrm{i}\exp\left[-\frac{3n_{\rm s}}{2}\right]\sin\left[\frac{\sqrt{3}n_{\rm s}}{2}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

グラム行列の対称性から信号ヒルベルト空間の正規直交基底が次式で表現できる．

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3h_1}}\Big\{|f_1\rangle + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}|f_2\rangle \\ &\quad + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}|f_3\rangle\Big\}, \end{aligned}$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3h_2}}\left\{|f_1\rangle + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}|f_2\rangle + \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}|f_3\rangle\right\},$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3h_3}}\left\{|f_1\rangle + |f_2\rangle + |f_3\rangle\right\}, \quad (5)$$

ここで $h_i, i = 1, 2, 3$ はグラム行列の固有値である．

$$h_1 = 1 - K_\mathrm{c} + \sqrt{3}K_\mathrm{s},$$
$$h_2 = 1 - K_\mathrm{c} - \sqrt{3}K_\mathrm{s},$$
$$h_3 = 1 + 2K_\mathrm{c}. \quad (6)$$

正規直交基底 $\{|e_i\rangle\}$ を用いて信号量子状態ベクトル $|f_i\rangle$ を要素数 3 の列ベクトル $\vec{f_i}$ として表現できる．

$$|f_1\rangle \Rightarrow \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\sqrt{h_1}\\ \sqrt{h_2}\\ \sqrt{h_3}\end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$|f_2\rangle \Rightarrow \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\sqrt{h_1}\\ \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\sqrt{h_2}\\ \sqrt{h_3}\end{bmatrix},$$

$$|f_3\rangle \Rightarrow \vec{f_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\sqrt{h_1}\\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}\sqrt{h_2}\\ \sqrt{h_3}\end{bmatrix}.$$

同様にして式 (2) のユニタリー作用素 $\hat{V}$ を $\{|e_i\rangle\}$ で表現すると以下の対角行列となる．

$$\boldsymbol{V} = \mathrm{diag}\left[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}, 1\right]. \quad (8)$$

3 I_ac を与える決定作用素

次に I_ac が 3 重対称な決定作用素で得られることを示す．まず，信号量子状態 $\{|f_i\rangle\}$ が張るヒルベルト空間は複素 3 次元空間であり，Davies の定理より I_ac を達成する決定作用素 $\left\{\hat{\Pi}_j\right\}$ の数はランク 1 の作用素で 3 個以上 9 個以下である [1]．ただし具体的な表記は与えられず,「複素 3 次元空間上のランク 1 の作用素」という条件から以下の表式を得るのみである．

$$\hat{\Pi}_j = |\omega_j\rangle\langle\omega_j|, \quad j = 1, 2, \ldots N, \quad (9)$$

$$|\omega_j\rangle \Rightarrow \vec{\omega}_j = \sqrt{m_j}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(1)}}\cos\phi_j\cos\psi_j\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(2)}}\cos\phi_j\sin\psi_j\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(3)}}\sin\phi_j\end{bmatrix},$$

ただし一般性を損なうことなく $\theta_j^{(3)} = 0$ とおける．また一般に以下の定義域を持つ．

$$-\pi \le \theta_j^{(1)} \le \pi, \quad -\pi \le \theta_j^{(2)} \le \pi,$$
$$0 \le \phi_j, \psi_j \le \tfrac{\pi}{2}. \quad (10)$$

ここで $|\omega_j\rangle$ は測定状態と呼ばれ，パラメータ m_j, ϕ_j, ψ_j, θ_j は以下に示す決定作用素（確率作用素測度）となる条件を満足するように定められる．

$$\hat{\Pi}_j \ge 0, \quad \sum_j \hat{\Pi}_j = \hat{I}. \quad (11)$$

次に，ある測定状態 $\{|\omega_j\rangle, j = 1, 2, \ldots N\}$ で I_ac が達成される場合，下記の 3 組（合計 $3N$ 個）の対称な測定状態 $|\mu_{j,k}\rangle$ でも同様に I_ac が達成されることは容易に示すことができる [2]．

$$|\mu_{j,1}\rangle \Rightarrow \vec{\mu}_{j,1} = \sqrt{p_j}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(1)}}\cos\phi_j\cos\psi_j\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(2)}}\cos\phi_j\sin\psi_j\\ \sin\phi_j\end{bmatrix},$$

$$|\mu_{j,2}\rangle \Rightarrow \vec{\mu}_{j,2} = \sqrt{p_j}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(1)}+2\pi\mathrm{i}/3}\cos\phi_j\cos\psi_j\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(2)}-2\pi\mathrm{i}/3}\cos\phi_j\sin\psi_j\\ \sin\phi_j\end{bmatrix},$$

$$|\mu_{j,3}\rangle \Rightarrow \vec{\mu}_{j,3} = \sqrt{p_j}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(1)}-2\pi\mathrm{i}/3}\cos\phi_j\cos\psi_j\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j^{(2)}+2\pi\mathrm{i}/3}\cos\phi_j\sin\psi_j\\ \sin\phi_j\end{bmatrix}.$$

そして対称な測定状態 $\{|\mu_{j,k}\rangle\}$ が決定作用素となるための条件は，変数変換を $u_j = \cos^2\phi_j$, $v_j = \cos^2\phi_j\sin^2\psi_j$ として次式で表される．

$$\textstyle\sum_j p_j = 1, \quad \sum_j p_j u_j = 2/3,$$
$$\textstyle\sum_j p_j v_j = 1/3. \quad (12)$$

以下では対称な測定状態によって得られる相互情報量の最大化を考える．

4 accessible information

信号量子状態 $|f_i\rangle$ を測定状態 $|\mu_{j,k}\rangle$ で測定した場合に得られる条件付確率は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}[P(j,k|i)] &= \left[|\langle\mu_{j,k}|f_i\rangle|^2\right] \qquad (13)\\ &= \frac{p_j}{3}\begin{bmatrix}|A_j|^2 & |B_j|^2 & |C_j|^2\\ |C_j|^2 & |A_j|^2 & |B_j|^2\\ |B_j|^2 & |C_j|^2 & |A_j|^2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

ただし，各確率振幅は以下のとおり．

$$\begin{aligned}A_j &= \sqrt{h_1(u_j-v_j)}\exp[-\mathrm{i}\theta_j^{(1)}]\\ &\quad+\sqrt{h_2v_j}\exp[-\mathrm{i}\theta_j^{(2)}]+\sqrt{h_3v_j/u_j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_j &= \sqrt{h_1(u_j-v_j)}\exp[-\mathrm{i}(\theta_j^{(1)}+2\pi/3)]\\ &\quad+\sqrt{h_2v_j}\exp[-\mathrm{i}(\theta_j^{(2)}-2\pi/3)]\\ &\quad+\sqrt{h_3v_j/u_j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_j &= \sqrt{h_1(u_j-v_j)}\exp[-\mathrm{i}(\theta_j^{(1)}-2\pi/3)]\\ &\quad+\sqrt{h_2v_j}\exp[-\mathrm{i}(\theta_j^{(2)}+2\pi/3)]\\ &\quad+\sqrt{h_3v_j/u_j}. \qquad (14)\end{aligned}$$

そして相互情報量は次式で計算できる．

$$\begin{aligned}I(Y;X) &= \sum_{i=1}^{3}\xi_i\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}P(j,k|i)\\ &\qquad\times\log_2\left[\frac{P(j,k|i)}{\sum_\ell\xi_\ell P(j,k|\ell)}\right]\\ &=\sum_{j=1}^{N}p_j\Bigg\{|A_j|^2\log|A_j|^2\\ &\qquad+|B_j|^2\log|B_j|^2\\ &\qquad+|C_j|^2\log|C_j|^2\\ &\qquad+\left(|A_j|^2+|B_j|^2+|C_j|^2\right)\\ &\qquad\times\log\left[\frac{3}{|A_j|^2+|B_j|^2+|C_j|^2}\right]\Bigg\}\\ &\equiv\sum_{j=1}^{N}p_jF(u_j,v_j,\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}). \qquad (15)\end{aligned}$$

ただし $\xi_i=1/3,\forall i$ を用いており，以下の式を定義した．

$$\begin{aligned}F(u_j,v_j,\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}) &\equiv |A_j|^2\log|A_j|^2\\ &\quad+|B_j|^2\log|B_j|^2+|C_j|^2\log|C_j|^2\\ &\quad+\left(|A_j|^2+|B_j|^2+|C_j|^2\right)\\ &\quad\times\log\left[\frac{3}{|A_j|^2+|B_j|^2+|C_j|^2}\right] \qquad (16)\end{aligned}$$

この相互情報量 $I(Y;X)$ を最大化することにより accessible infomation が得られる．その第一段階が j 番目の対称測定による相互情報量への寄与を表す $F(u_j,v_j,\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)})$ の最大化である．それは各 (u_j,v_j) において $\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}$ による最大化を行うことを意味し，結果として関数 $F_{\max}(u_j,v_j)$ が得られる．

$$F_{\max}(u_j,v_j)\equiv\max_{\theta_j^{(1)}}\max_{\theta_j^{(2)}}F(u_j,v_j,\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)}). \qquad (17)$$

これらの最大化は数値解析によって行われる．

5 パラメータの定義域

式 (17) に示した最大化において，パラメータ $\theta_j^{(1)}$, $\theta_j^{(2)}$ の定義域は式 (10) に示されている．しかし式 (14) より何らかの対称性が存在し，定義域を狭められる可能性がある．以下ではそのことについて議論を行う．

まず表現を簡単化するため式 (14) を次式で表す．

$$\begin{aligned}A &= x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^{(1)}}+y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta^{(2)}}+z, \qquad (18)\\ B &= x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta^{(1)}+2\pi/3)}+y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta^{(2)}-2\pi/3)}+z,\\ C &= x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta^{(1)}-2\pi/3)}+y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta^{(2)}+2\pi/3)}+z.\end{aligned}$$

この表現から第一項と第二項の偏角 $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ には $\pm2\pi/3$ の循環性があることが判る．そこで区間 $[-\pi,\pi]$ を 3 分割し，各小区間で確率振幅 A,B,C における各項の偏角を求め表 1 に示す．そして第一項の偏角に注目すると，三つあるいずれの小区間においても，一つの小区間で確率振幅 A,B,C が $-\pi$ から π までをカバーしていることが判る．すなわち，ある小区間から別の小区間に移ることは確率振幅 A,B,C 並びを入れ替えることに等価である．そして式 (16) より，関数 $F(u_j,v_j,\theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)})$ が確率振幅に関して対称な式

表 1: 各小区間における第一，第二項の偏角

$\theta^{(1)}$	$-\pi, -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}, \pi$
$\theta^{(1)} + \frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}, \pi$	$-\pi, -\frac{\pi}{3}$
$\theta^{(1)} - \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}, \pi$	$-\pi, -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$
$\theta^{(2)}$	$-\pi, -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}, \pi$
$\theta^{(2)} - \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}, \pi$	$-\pi, -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$
$\theta^{(2)} + \frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}, \pi$	$-\pi, -\frac{\pi}{3}$

であるため，並びの入れ替えはその値に影響を与えない．すなわち一つの小区間で式 (17) に示す最大化を行えば良いことになる．

次に第二項の偏角を見ると，第一項のそれと同じく 1 つの小区間で全定義域をカバーしていると言える．しかし $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$ の入れ替わり規則が異なるため，単純に A, B, C 並びを入れ替える訳にはいかない．具体的には $\theta^{(1)}$ の変域を小区間にした場合には $\theta^{(2)}$ の変域は $-\pi$ から π までにする，反対に $\theta^{(2)}$ の変域を小区間にした場合には $\theta^{(1)}$ の変域は $-\pi$ から π までにする必要がある．結果的に式 (10) に示した定義域は以下の式で十分であると言える．

$$-\tfrac{\pi}{3} \le \theta_j^{(1)} \le \tfrac{\pi}{3}, \quad -\pi \le \theta_j^{(2)} \le \pi, \\ 0 \le \phi_j, \psi_j \le \tfrac{\pi}{2}. \tag{19}$$

6 まとめ

以上の解析により，accessible information を導出する際に数値解析によって最大化を行うパラメータの定義域を狭めることができた．これによって数値解析の時間短縮，もしくは精度向上が図れる．しかし具体的な数値解析は今後の課題として残っている．

参考文献

[1] E. B. Davies, IEEE, Trans. Inf. Theory, **IT-24**, 596, (1978).

[2] P. Shor, Presentation at QCM & C Y2K, Capri Italy, July 3rd, 2000. Private communication.

２０１２年２月１６日原稿受付
Received, February 16, 2012