

[原著論文]

職業教育に繋がる中等教育における数学教育について

——ドイツの職業教育の紹介——

守屋誠司

要 約

職業教育へ繋げられる中等教育における数学教育を研究する必要がある。そのために、複線型中等教育を実施しているドイツ・バイエルン州の基幹学校と実科学校の教育目標と教育内容、卒業試験問題を調べた。また、バイエルン州とバーデン・ヴュルテンベルク州の職業学校(Berufsschule)を現地調査したので、そこでの数学教育を紹介する。

キーワード：数学教育, 職業教育, ドイツ, Berufsschule, 中等教育

I 目的と目的設定の理由

卒業後、非理系大学・高等専門学校への進学や企業への就職を考えている中等学校の生徒への数学教育の研究を喫緊に遂行しなければならない理由として、大学生の学力不足の問題がある。今日の大学教育では、新入生に対するリメディアル教育は一般的となり、そこでは、高等学校の数学の復習をしている場合が多い。筆者の勤務する非理系である教育学部では、新入生に対して高校1年生修了レベルの数学検定試験準2級合格を課している。しかしながら、1年間のリメディアル教育後でも、平成22年入学生の約2割の学生は不合格であった(富永(2012))。中学校、高等学校の6年間、数学を学んだにも関わらず、文系大学生の学力は中学3年～高校1年のレベルなのである。大学等の高等教育機関進学率は同年齢者の50数%であるが、非進学者の数学レベルはさらに低いのではと推察される。確かに日本の数学カリキュラムは系統性があり、各高等学校における単位認定制度は機能しているはずなのだが、実際の学力の保証は、不十分で危ない実態があると認識する。

学力不足の要因の一つに、学校で教えられる数学の内容とカリキュラムが、時代に合っていないのではと考えられる。日本の学校教育で指導される数学の内容は、微分方程式にいたる解析学の理解を最終目標とするカリキュラムになっていると見て良いだろう。このカリキュラムの源は、産業革命の進展に伴い重・軽工業に必要な数学を学ばせ、それらに従事し産業を發

展させられるエリートや優秀な技術者の育成という20世紀初頭からの発想にあった。しかし高度情報通信社会といわれ、産業や社会で必要とされる数学が多様となった今日では、理系エリートのために作成された従来のカリキュラムは、様々な職種へ就職するであろう生徒らに不応を起こさせる。

このように考えると今後の中等学校においては、就職希望者や非理系進学者のための学力保障システムが必要である。例えば、建築関係者の基礎学力を保証するためには、今日のカリキュラムでは体系的でない平面幾何を改良した上で、内容を増やした立体幾何も体系的に学ばせる必要がある。また、生産に関わる中小企業従事者に必要な数学もあるはずである。

以上のように、旧社会に対応した統一カリキュラムを全国一律に指導する日本の教育制度は限界に来ていると考えられる。日本社会の発展のために、就職希望者や非理系進学希望者のための中等教育学校（中学校・高等学校）における数学の教育内容とカリキュラムを再考し、再構築することは大きな課題である。そこで、筆者らは、次のことを目標に研究を始めた。

- ① 諸外国の複線型カリキュラムと内容・教材を調査研究し、日本のカリキュラムへの適用性を検討する。
- ② 国内の職業高校における専門教育科目と数学科目との関連や、普通高校文系における数学履修の様相を調査し、実態と課題を明らかにする。
- ③ 職業教育や文系大学等進学に適応する数学の教育内容と教材を開発し、カリキュラムを提案する。

この研究の一環として、本稿では、伝統的な複線型の教育システムを継続し、教育レベルの高いドイツ・バイエルン州の基幹学校と実科学校の教育目標と教育内容、卒業試験問題を調べた。また、バイエルン州とバーデン・ヴュルテンベルク州の職業学校（Berufsschule）を現地調査したので報告する。生徒の学力をどのように捉えて教育し、卒業時の学力保証をどのように行い、さらにその後の職業教育をどう行っているかを調べることは、現在の日本で問題となっている学力低下と低学力生徒への対応、就職難、ニートの増加という問題を解決するヒントになると考えた。

II ドイツの教育制度

ドイツの義務教育は6歳から始まり、地域の公立の基礎学校（Grundschule）に9月から入学する。バイエルン州のこの学校は4年制であるが、ベルリン市などは6年制を採っている。基礎学校を卒業すると公立の中等教育学校である、日本の中学校に相当する基幹学校（Hauptschule）/中等学校（Mittelschule）、普通高校に相当す

複線型学校システム



図1 バイエルン州の学校システム

る実科学校 (Realschule), 大学進学校に相当するギムナジウム (Gymnasium) から選択して入学するのが一般的である。

基幹学校/中等学校の生徒は、卒業後に職業見習いとして職業に就きながら職業学校で理論と高度な技術, 一般教養を学ぶ。働きながら週2日ずつ通う場合と, 学校が遠方の生徒は2週間くらい集中講義に通う場合とがあり, 授業料は一般に無料である。就職しながら学校に通い教育を受けるこのシステムはデュアルシステムといわれ, 「1969年に職業教育法 (Berufsbildungsgesetz vom 1969) が成立し, 工業, 商業, 農業, 手工業などの個別経営部門ごとに別々に規制されていた職業訓練行政が統一法にしたがうようになってからは, 2つの職業教育機関 (筆者注: 企業と学校) はより協調的な関係を築くようになる」(寺田 (2003), p. 9より) から, 今日に続いている。従って, 基幹学校等のカリキュラムでは, 卒業後すぐにこのシステムに対応できるようにと配慮されている。基幹学校は主に5年制を採っているが, 希望者はさらに1年間通い高度な内容を学ぶこともできる。なお, 2011年からバイエルン州の基幹学校は, 中等学校と呼び名を変え, 新たな教育システムに移行しているが, それについての詳細は稿を改めて考察することにする。

6年制の実科学校の生徒は卒業後に就職して職業学校に通ったり, 職業専門学校 (Berufsfachschule) に進学した後で基幹学校卒業生より専門的技術や知識が必要な職業に就いたりする。なお, 高等学校修了証明に相当専門アビトゥーアを取得して, さらに, 工業専門大学等の専門大学に進学もできる。

ギムナジウムの生徒は卒業後に一般の総合大学への進学を希望している。ギムナジウムは近年制度が変わり9年制から8年制となった。この学校では大学進学のために, 高度な教育内容を教えている。通常のギムナジウムの他に, 例えばベルリンの職業ギムナジウム (Berufsgymnasium) のように, 職業関連科目に重点をおいたギムナジウムもある。このギムナジウムでは, 経済や法律の科目があり, これら科目で卒業試験を受けてアビトゥーアを取得し, 総合大学の経済系や法律系に進学する生徒が多い。

基礎学校の卒業時に前述したこれら3種類の中等教育学校から一つを選択する。子どもの希望も考慮されるのだが, 基本的には親と基礎学校4年生のときの担任の先生が, 子どもの成績や親の希望をもとにしてどの種類の学校に入学させるかを決定することが多い。大まかに基幹学校/中等学校, 実科学校, ギムナジウムの順で生徒の学力や教育内容のレベルは高くなっている。最近では子どもの大学進学を希望する親が多いため, ギムナジウムへの入学者数が増えてきている。近年, 移民としてドイツに入国したドイツ語を母国語としない親の子女が基幹学校に入学しているため, 言語を良く理解できないことによる低学力化とそれに伴った生徒指導上の問題が起きている。かつてのドイツのマイスター制度を支えた職人の誇りなど, 見る影さえないともいわれる (川口 (2004))。

次は, 卒業試験制度である。基幹学校や実科学校, ギムナジウムの卒業資格は, 卒業国家 (筆者注: 州のこと) 試験において一定の成績を獲得することで得られる。この試験は必修教科と

選択教科のすべてで実施され、それら教科のすべてに合格しなければ卒業資格を獲得できない。バイエルン州においては、州として統一した試験問題が作られ、実施されている。州によっては学校ごとに作るようになってきているところもある。この試験によって得た成績はその後の就職活動や大学進学などに大きな影響を及ぼすため、単に卒業資格を取れば良いのではなく、好成績が求められる。

Ⅲ 数学教育の目標と内容

1. 基幹学校の教育目標と授業方法

基幹学校の教育目標と教育内容の詳細は守屋・他(2011)を参照にして欲しい。大まかには、基幹学校のほとんどの生徒は卒業後に就職するために、職業に就いたときに対応できる学力を形成しておくことを教育の第1の目標としている。授業では「自分で考える」ようにするなど、問題解決のために数学を一人で使えることが目標となっている。また、目標には「限界にぶつかると」という表現があるが、現状の内容の理解だけで満足することなく、より高度な数学の学習を続けるようにと示唆している。

授業を行う際には、日常世界の問題や生徒が興味を湧かせている内容などから始めるのが大切であり、また、数学の授業以外のところで困難な問題に遭遇したときに、一人でそれを処理できるような力をつけさせる指導をするよう述べられている。

2. 基幹学校の教育内容

日本の中学校とそれほど変わらないが、論証を全く扱わない。さらに確率も扱われていない。日本以上の内容としては、複雑な一次方程式と、複雑な複合平面図形や複合立体図形の面積や表面積・体積の求積を扱っている点である。

各学年には、自然数、四則演算、幾何学、項と方程式、分数、現実の中の数学など、5単元ないし6単元があり、各々の単元に目標が設定されている。特徴として、まず、様々な活動を通して理解を深め、抽象概念を形成していく必要があると、指導方法に言及している点である。次に、計算と作図が重要視されている点である。作図ではコンパスとゲオドライエック(分度器の機能を組み込んだ直角二等辺三角形の定規)を使う。計算は平面幾何では面積と周囲の長さ、立体幾何では体積と表面積、密度から重量を求めることが中心となっている。さらに、日本以上に現実の中の課題を取り扱うことを重要視している。第5学年、第6学年においては「現実の中の数学(Sachbezogene Mathematik)」という単元がある。

3. 実科学校の目標の序文

前文には、数学は日常生活における様々な困難を克服することに生かされる一方、他方ではさらに続く学校教育や職業的なキャリアの基礎にも必要不可欠であり、数学的な能力は文化技術の一部であるというように、職業訓練における数学の意味付けがされている。

さらに、数学の授業は小学校で取得した知識、能力、技能を基盤に構築する。その際には、生徒の考え方が、まだ、具体的な概念にとらわれていることを考慮に入れ、カリキュラムは具体物を使った操作による経験を積むことを可能にしている。生徒が段々と発達していくのに従って、数学授業の重要な課題は、生徒の考え方を具体的思考から抽象的思考に導いていく。さらに、7年生以降は、数学の授業の細分化がなされ、選択必修科目群ⅠおよびⅡ、Ⅲにおける授業は、教授内容や取り扱う内容の深さ、要求の高さにほとんど一貫して区別されている。選択必修科目Ⅰではより深く数学の授業が行われるとしている。この後に、算術と代数、幾何、データと頻度、代数と幾何の関係、問題解決と目標が続く。

4. 実科学校の教育内容

Da dies keine Addition im herkömmlichen Sinne ist, wird für die Verkettung von Vektoren ein verändertes Additionssymbol verwendet. Die beiden Verschiebungen lassen sich also durch die einzige neue Parallelverschiebung ersetzen. Für diese Ersatzabbildung entsteht ein neuer Verschiebungsvektor durch Addition der Einzelvektoren. Roman hatte mit seiner Bemerkung Recht.

In einem Koordinatensystem lässt sich diese Vektorverkettung noch präziser darstellen - siehe Zeichnung in der Randspalte. Der Beispielvektor \vec{p} wird durch eine Vektorverkettung abgebildet. Anhand von Streckenvergleichen ergeben sich in der nebenstehenden Zeichnung folgende Zusammenhänge für die Addition zweier Vektoren.

$$\vec{c} = \vec{v}_{\text{result}} = \vec{a} \oplus \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Aus der Gültigkeit des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes bei der Addition von Zahlen folgt:

図2 7年生 (K. Gierse(2002)p. 90 より)

Die Schweißkontakte P und Q einer Punktschweißmaschine sind genau 5,0 cm voneinander entfernt und sitzen auf einem gemeinsamen Halter, dessen Arm computergesteuert geführt wird. Der Computerbildschirm zeigt ein kartesisches Koordinatensystem mit P(2|2). Der Schweißarm wird so geführt, dass der Kontakt P auf einer Bahn verläuft, die im Koordinatensystem durch die Gleichung $y = 2 \cdot \log_2 x$ beschrieben wird. Von P nach Q gelangt man mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Gleichung der Bahnkurve der Punkte Q soll ermittelt werden.

Dazu muss die Bahnkurve der Punkte P mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschoben werden. Die Gleichung des Bildgraphen ermitteln wir mithilfe des Parameterverfahrens.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot \log_2 x \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ 2 \cdot \log_2(x+4) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+4 \\ y' = 2 \cdot \log_2(x'+4) \end{cases} \quad x = x'+4$$

$$\Leftrightarrow y' = 2 \cdot \log_2(x'+4) + 3 \quad D = \{x' | x' > -4\}; \quad W = \mathbb{R}$$

Die Asymptote dieser Bahnkurve hat die Gleichung: $x' = -4$.

Die Gleichung der Bahnkurve der Punkte Q lautet nach Umbenennung von x' und y' in x und y : $y = 2 \cdot \log_2(x+4) + 3$

Werden die Graphen von Logarithmusfunktionen durch Parallelverschiebung abgebildet, dann können die Funktionsgleichungen der Bildgraphen mit dem Parameterverfahren ermittelt werden.

Für Funktionen der Form $y = a \cdot \log_b(x+c) + d$ gilt: $D = \{x | x > -c\}$ und $W = \mathbb{R}$. Asymptote: $x = -c$

図4 10年生 (K. Gierse(2005)p. 49 より)

Damit ergibt sich für die Nenner von x und y :

$$\begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_N = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

x -Spalte y -Spalte Spalte mit Konstanten

Zur Berechnung von x erhält man die Determinante für den Zähler, wenn man bei D_N die Spalte der Koeffizienten von x (a_1 und a_2) durch eine Spalte mit c_1 und c_2 ersetzt:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

Zur Berechnung von y erhält man die Determinante für den Zähler, wenn man bei D_N die Spalte der Koeffizienten von y (b_1 und b_2) durch eine Spalte mit c_1 und c_2 ersetzt:

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Damit können die Formeln zur Berechnung von x und y wesentlich einfacher dargestellt werden:

$$x = \frac{D_x}{D_N} \quad \text{und} \quad y = \frac{D_y}{D_N} \quad \text{mit } D_N \neq 0$$

Für lineare Gleichungssysteme der Form

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

kann man mithilfe von Determinanten die Lösungen bestimmen:

$$D_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad x = \frac{D_x}{D_N}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad y = \frac{D_y}{D_N}$$

$$D_N = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{mit } D_N \neq 0$$

Mit den Zahlenwerten der oben gegebenen Tabelle ergibt sich ($G = G \times O$):

$$D_N = \begin{vmatrix} 3,5 & 2,4 \\ 1,8 & 2,4 \end{vmatrix} = 5,2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1,8 & 2,4 \\ 3,2 & 3,2 \end{vmatrix} = -1,92$$

$$x = \frac{D_x}{D_N} = \frac{-1,92}{5,2} \approx -0,37$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3,5 & 1,8 \\ 2,5 & 3,2 \end{vmatrix} = 6,7$$

$$y = \frac{D_y}{D_N} = \frac{6,7}{5,2} \approx 1,29$$

$$\Rightarrow L = \{(-0,37 | 1,29)\}$$

図3 9年生 (K. Gierse(2004)p. 17 より)

Behauptung: Die Diagonalen einer Raute schneiden sich im rechten Winkel.

Beweisidee: Zu zeigen ist $\vec{e} \perp \vec{f}$.

Dazu werden die Vektoren \vec{e} und \vec{f} mit den Hilfsvektoren \vec{a} und \vec{b} ausgedrückt und im Verlauf der Rechnung die Tatsache genutzt, dass diese gleich lang sind (Raute).

Beweis:

$$\vec{e} = \vec{b} \oplus \vec{a}; \quad \vec{f} = (-\vec{a}) \oplus \vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{e} \oplus \vec{f} = (\vec{b} \oplus \vec{a}) \oplus ((-\vec{a}) \oplus \vec{b})$$

$$\Leftrightarrow \vec{e} \oplus \vec{f} = \vec{b} \oplus (-\vec{a}) \oplus \vec{b} \oplus \vec{a} \oplus (-\vec{a}) \oplus \vec{a} \oplus \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{e} \oplus \vec{f} = \vec{b} \oplus (-\vec{a}) \oplus \vec{a} \oplus \vec{b} \oplus \vec{b} \oplus (-\vec{a})$$

$$\Leftrightarrow \vec{e} \oplus \vec{f} = 0 \quad \text{wegen } |\vec{b}| = |\vec{a}|$$

$$\Rightarrow \vec{e} \perp \vec{f} \quad \text{q. e. d.}$$

図5 10年生 (K. Gierse(2005)p. 122 より)

概ね、日本の高等学校の数学Ⅱ・Bまでの範囲であるが、微積分は扱われない。また、日本のような厳密な図形の論証も扱われない。さらに、立体の体積・表面積は9年生と日本に比べてかなり遅い。ただし、次のように日本より高度な内容を扱う。

5年生で、集合、簡単な一次方程式を扱う。6年生で、日本の中1にあたる平面幾何、一次方程式、正負の加減を扱う。

7年生で、マイナスを含むべき乗と指数計算、一次不等式、平行移動からベクトルの導入、ベクトルの成分表現と加減(図2)、平行・対称・90度回転移動の一次変換、円周角を扱う。8年生で、式の展開と因数分解、2次関数における平方完成と最大値・最小値、分数数式の加減乗除、和集合、対応、一次不等式と座標上での集合表現、立体幾何(二面角)を扱う。9年生では、日本の理系大学初年で扱う行列、行列式、行列式による連立方程式の解法がある(図3)。連立不等式、三角形の面積公式の行列式表現(ここで三角形等の各種図形の求積公式やピタゴラスの定理を扱う)、ユークリッドの高さ定理・放物線(焦点)、相似変換、放物線と直線・放物線接点や接線等、カバリエリの原理を使った柱体・錐体の体積・表面積を扱う。

10年生は、指数・対数・三角関数(図4)、ベクトルの内積と内積を使った証明問題(図5)、行列表現の一次変換とそれを使ったフラクタル図形であるシェルピンスキー・ガスケッット作成手順を扱う。

このように全体的に、日本より1年程度レベルが高く、集合、行列、ベクトルは日本の中学校1学年から指導される。さらに、立体幾何の内容が豊富である。ただし、論証と言うより計量や数値計算が多いのが特徴である。

Ⅳ 卒業のための資格

基幹学校、実科学校、ギムナジウムにはそれぞれ卒業資格を与えるための試験が存在しており、各教科に設けられている。必修科目と選択科目があり、すべてにおいて一定以上の成績を取らなければ、卒業資格が与えられない。バイエルン州の数学の卒業国家(注:州のこと)試験について紹介する。なお、基礎学校では卒業国家試験はないが、共通テスト程度のものがあり、その成績は進路決定の重要な資料となっているという。

1. 基幹学校の卒業試験(2007年)

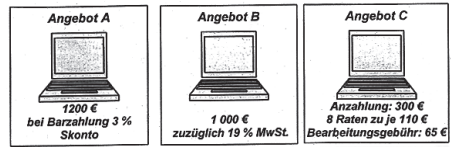
バイエルン州では2つのタイプの試験が用意されており、その2つの合計点によって成績がつけられる。電卓や公式集を使用せずに解くA問題、それらを使って良いB問題である。

1. A問題の例

問7 ノートパソコンの購入方法が3種類あり、どのプランで買うと一番安いかを説明する問

題である。

「Aのプラン……ノートパソコンの価格は1200ユーロだが、現金での支払いの場合3%引きされる。Bのプラン……ノートパソコンの価格は1000

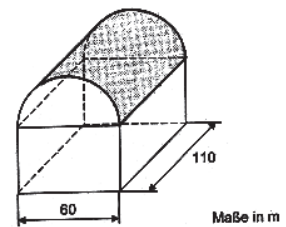


ユーロだが、付加価値税19%かかる。Cのプラン……現金で300ユーロ払い、残りは8回の分割払いで1回あたりの支払額は110ユーロである。手数料として65ユーロがかかる。」

A問題は、このように消費者としてだけでなく、卒業後に、仕事上でも遭遇するであろう基本的な問題が出題される。

2. B問題の例

G3問4 「美術館の最上階部分は半円柱型になっている。この反った屋根は外側に特別なコーティングをする必要がある。このコーティングは1平方メートルあたり、労働工賃も含め160ユーロ費用がかかる。市議会はこのために150万ユーロを財政から用意した。この金額で十分に足りるだろうか。」



B問題は、日常生活に必要な知識や、それらを解決する方法が問われているやや複雑な問題が多い。公式は暗記の対象ではなく、その適用場面の判断や実際に計算できるかが評価される。計算の正確さよりも計算方法の妥当性に重点がおかれている。%を使った割合の問題は小学校高学年程度のレベルであるが、一元一次方程式の問題は高校入試レベルであり、成績下位の生徒を対象としている割にはレベルが高い。図形の求積では、ピタゴラスの定理の応用が到達目標となっている。

2. 実科学校の卒業試験（2011年）

1. A問題の例

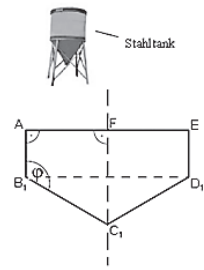
A1 「ダフネは“若手の研究会”に参加する予定である。そこでの発表のために彼女はすでに水槽内のミジンコの生殖について研究している。研究当初は120匹のミジンコだった。彼女の推測では翌週からは一日35%増殖するとしている。

1. 実験の初日からの日数 x とミジンコの数 y との関係は指数関数 $y = y_0 \cdot k^x$ で表せる。その関数式を書け。
2. 実験3日目終了時点でのミジンコの子供される数を計算によって求めよ。
3. 最初にミジンコの数500より大きくなるのは実験何日目であるか。計算せよ。
4. 実験開始から最初の週の最終日にミジンコの数838匹であることを確認した。ダフネが毎日35%増殖するとした仮定は正しいか。その理由を述べよ。」

A2 問題は略すが、2つのベクトルが与えられて、それによってできる平行四辺形に関わる

問題である。

A3 「ある会社は鉄鋼タンクを製造している。軸方向に切断すると軸に対称の五角形ABCDEがある。頂点Cと辺AEの中点Fは対称軸上にある。



$$E = 2.00\text{m}, FC = 2 \cdot AB, \angle BAE = 90^\circ, \angle AFC = 90^\circ$$

$\angle CBA$ は単位 $104.04 \leq \phi \leq 160.02$ で表される。

右の図は $\phi = 120^\circ$ の五角形ABCDEを示している。

1. 体積 V を ϕ の関数で表せ。
2. 最もよく売られるタンクは容積5000リットルである。計算によって適切な角の大きさ ϕ を求めよ。結果は小数点第二位までで丸めよ。」

2. B問題の例

B1 問題は略すが、底面が菱形の四角柱の作図と切断面の問題等で、空間能力と三角関数が問われる。

B2 問題は略すが、関数 $y = 1.5^{x+2} - 4$ と $y = -6 \cdot 1.5^{x-1} + 3$ の作図と面積に関する問題。

A問題は現実場面との関わりを持つ問題である。B問題は純粋に数学の問題であるが、作図が最初に入り、その後で総合的な知識を必要とする設問が続く。日本の高等学校の数学Ⅱ・B(微積分を除く)とほぼ同じレベルになっている。しかし、立体や空間の問題などは、日本の生徒、特に文系の生徒にはかなり難しい内容であろう。

V 職業学校での数学授業の実際

伝統的な複線型の教育システムを採り、PISAの成績がドイツ国内の上位であり、普通教育が成功していると考えられるバイエルン州とバーデン・ヴュルテンベルク州において、普通教育との接続する職業教育はどのように行われているかを現地調査することとした。2012年3月にバイエルン州フルト市にある職業学校Martin-Segitz-Schule/Staatliche Berufsschule III Fürth, 同年12月にバーデン・ヴュルテンベルク州カールスルーエ市にある職業学校Heinrich-Huebsch-Schuleとバイエルン州エアラゲン市にあるStaatliche Berufsschuleを訪問し、数学を指導している授業を参観したので紹介する。

1. Martin-Segitz-Schule/Staatliche Berufsschule III Fürth

1) 住所：Otto Straße 22, D90762 Fürth (<http://www.b3-fuerth.de/>)

2) 概要：バイエルン州立の職業学校で、電気工学、情報学、メディア工学、金属工学の各学科がある。10年～12年生までの学校で、約3000人の学生が在学する。教員数は45名。生徒は、



図6 車のバッテリーの原理を学習している



図7 論理回路の設計をしている

2.7 Kräfte

Eine Kraft F lässt sich durch einen Pfeil zeichnerisch darstellen (Bild 1). Die Länge des Pfeiles entspricht der Größe der Kraft und wird durch den Kräftemaßstab bestimmt, z.B. $50\text{ N} \triangleq 1\text{ mm}$. Die Pfeilrichtung gibt die Richtung der Kraft auf der Wirkungslinie an. Greifen zwei Teilkräfte F_1 und F_2 an einem Körper an, so kann man die Ersatzkraft F ermitteln:

- Bei parallelen Kräften durch Summieren (Bild 2a und b).
- Bei nicht parallelen Kräften durch Konstruieren (Kräfteparallelogramm Bild 2c) oder durch Rechnen (Trigonometrie, Satz des Pythagoras beim Winkel 90°).

Beispiel:
Die Kraft F_1 in Bild 2c besitzt 200 N , die Resultierende ist $F = 300\text{ N}$. Wie groß ist die Teilkraft F_2 bei einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ zwischen F_1 und F_2 ?

Lösung:
 $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2} = \sqrt{300^2\text{ N}^2 - 200^2\text{ N}^2} = 224\text{ N}$

Kräfte haben die Einheit Newton. $[F] = \text{N}$

Aufgaben zu 2.7

1. Auf einen Wagen wirken mit gemeinsamer Wirkungslinie die Teilkräfte $F_1 = 500\text{ N}$, $F_2 = 700\text{ N}$ und $F_3 = 1200\text{ N}$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Ersatzkraft a) wenn alle Kräfte in gleicher Richtung wirken, b) wenn F_3 entgegengesetzt zu F_1 und F_2 wirkt (Kräftemaßstab: $100\text{ N} \triangleq 5\text{ mm}$).
2. An der Wandbefestigung (Bild 3) greifen unter einem Winkel von $\alpha = 90^\circ$ zwei Kräfte $F_1 = 150\text{ N}$ und $F_2 = 200\text{ N}$ an. Bestimmen Sie a) rechnerisch und b) zeichnerisch Größe und Richtung der Ersatzkraft F (Kräftemaßstab: $1\text{ N} \triangleq 2\text{ mm}$).
3. An einem Freileitungsmast sind 2 Leitungen im Winkel $\alpha = 100^\circ$ abgespannt (Bild 4). Ermitteln Sie zeichnerisch die Kräfte F_1 und F_2 der beiden Leitungen, wenn der Mast mit einer resultierenden Kraft von $F = 22\text{ kN}$ belastet wird (Kräftemaßstab: $1000\text{ N} \triangleq 2\text{ mm}$).
4. Ein Lastmagnet (Bild 5) mit einer Gewichtskraft von 2 kN und ohne Last von 3000 N hängt an einer zweisträngigen Kette mit einem Spreizwinkel von $\alpha = 45^\circ$. Wie groß ist die Belastung in den beiden Kettenträngern? (Kräftemaßstab: $100\text{ N} \triangleq 1\text{ mm}$).
5. An einem Abweismast wirken 3 Zugkräfte $F_1 = 17\text{ kN}$, $F_2 = 17\text{ kN}$ und $F_3 = 12\text{ kN}$ nach Bild 6. Bestimmen Sie zeichnerisch die Kraft F , mit welcher der Mast beansprucht wird, und die Kräfte richtung.

Bild 1: Angriffspunkt, Richtung und Wirkungslinie einer Kraft. $F = 120\text{ N}$, Kräftemaßstab: $50\text{ N} \triangleq 1\text{ mm}$.

Bild 2: Kräfte a) in gleicher Richtung, b) entgegengesetzt, c) senkrecht aufeinander. $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$, $\alpha = 90^\circ$.

Bild 3: Wandbefestigung. $F_1 = 150\text{ N}$, $F_2 = 200\text{ N}$, $\alpha = 90^\circ$.

Bild 4: Spitzenzug. $F = 22000\text{ N}$, 100° .

Bild 5: Lastmagnet. $F = 2000\text{ N}$, 3000 N , 45° .

Bild 6: Abweismast. $F_1 = 17\text{ kN}$, $F_2 = 17\text{ kN}$, $F_3 = 12\text{ kN}$.

図8 電気工学の演習書 (P Bastion (2001) p. 37 より)

4年から2年の見習い職人で、若い人である。バイエルン州全体から集まり、1~2週間の集中授業を行っている。ミュンヘンの企業に勤めていて、授業のためにユースホステルに泊まっている生徒もいる。小さい工場では、理論教育ができないし、適当な先生もいないため、ここに来て勉強している。授業料は無料である。併設している Berufsfachschule は、全日制の学校で、17歳~25歳の学生が来る。学生のレベルは職業学校生より低いとのこと。

一般教養の授業はないが、技術関係書は英語の本や論文が多いので英語は行っている。技術の進歩、卒業試験の内容の変更があるので、先生方も常に勉強しているとのことである。

10年前に新しいシステムになり、単一教科としての数学はなくなり、総合学習(10年~11年)の中で扱われている。電気関係の授業を参観した。一つは論理回路の理論で、もう一つはPCを利用した実際の論理回路の設計である。基幹学校では扱っていない数学であるが、仕事上では重要な内容である。図8の使用されている教科書を見ると、基本的な四則演算の復習から始まり、その後は仕事内容に直結する数学を扱っている。

2. Heinrich-Huebsch-Schule Karlsruhe

1) 住所: Fritz-Erler-Straße 16, D76133 Karlsruhe (<http://www.huebsch-ka.de/>)



図9 数学の授業風景

4. Division

Bevor wir zwei komplexe Zahlen dividieren, führen wir noch einen neuen Begriff ein:

$\bar{z} = x - iy$ (gelesen: „z quer ...“) heißt die zu $z = x + iy$ „konjugiert komplexe Zahl“.

Zwei zueinander konjugiert komplexe Zahlen haben also denselben Realteil, sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils. In der Gaußschen Zahlenebene bedeutet dies, dass eine komplexe Zahl und ihre konjugiert komplexe Zahl spiegelbildlich zur reellen Achse liegen (vgl. Abb. 9.30).

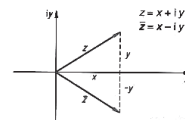


Abb. 9.30

Wir multiplizieren z mit \bar{z} und erhalten:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Das Produkt von z und \bar{z} ist also eine (nichtnegative) reelle Zahl.

Diese Tatsache nutzen wir aus, wenn wir den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ zweier komplexen Zahlen in der Gestalt $x + iy$ schreiben wollen:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 - i^2 y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3+4i}{2-5i} &= \frac{(-3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{-6-20+i(8-15)}{4+25} = \frac{-26-7i}{29} \\ &= -\frac{26}{29} - \frac{7}{29}i \end{aligned}$$

図11 複素数の除法

(P. Bardy (2009) p. 205 より)

142. Berechnen Sie die Länge der Kopfschraube in mm!

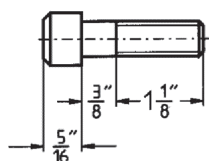


Abb. 2.9

図10 分数の応用問題

(P. Bardy (2009) p. 34 より)

2) 概要：ビジネススクールの感じで，職業学校，職業専門学校，マイスター学校などのいくつかの学校があり，この学校を最終的に修了すると学士の学位が取得できるとのことであった。

参観したクラスは，2年間企業に就職しながら，学校で勉強している生徒達であった。2年間で4セミスター学習し，1セミスターあたり520ユーロの授業料がかかる。

2ヶ月前から始まった代数の授業を参観した。基幹学校や実科学学校修了者など，いろいろな学歴の生徒がいるので，数学のスタートレベルを同じにしている。20歳から40歳の生徒のクラスで，大工などいろいろな職業の生徒がいる。

技術者用の代数の教科書を使った，二元一次連立方程式の授業であった。代入法とその練習2題を生徒が解いた後， $y = \dots$ と式変形して等式を作る方法で，それら同じ問題を解き直すという授業であった。特に職業と関わらずに，連立方程式の一般的指導であり，レベルは基幹学校の内容である。中括弧の向きさえ分からない生徒もいたが，皆，真剣に学習していた。

教科書は，技術者のための代数書で，分数の足し算の後で，ねじの長さの足し算練習（図10）があるなど，工学系の練習問題がある。この教科書では，複素数の計算（図11）まで扱う。

3. Staatliche Berufsschule Erlangen

1) 住所：Drausnickstrae 1, D91052 Erlangen (<http://www.bs-erlangen.de/index.shtml>)

2) 概要：大きなイベントや会社のパーティーのオーガナイズをするイベントエージェントのクラスを参観する。就職していないとこの学校には入学できなく、就職先は、銀行、サービス業（イベント業）、商店などである。2年～3年で卒業試験がある。卒業試験には1回落ちても良いが、会社等の許可を得て再度通学の上で2回目に挑戦できる。ただし、3回目のチャンスはない。卒業後に、職業高等専門学校（Fachoberschule）に進学して卒業すると、アビトウア資格で、一般の総合大学を除いた、各分野の単科大学（Hochschule）に進学できる。このクラスは、90%がギムナジウムを出ているため、イベント員としてのレベルアップを目的にしている生徒が多く、そのまま職業を続けるという。

普段はイベント関係の仕事をして、集中授業を各科目10時間受ける。2週間授業+2週間職場を繰り返す。一般には2年～3年で卒業するが、学歴・既得資格・商工会議所・学校で判断して2年の短縮になることがある。

Ausgangssituation:

Sie haben bereits die Gesamtkosten der unten angegebenen Kreditangebote berechnet. Ihr Chef möchte aber von Ihnen wissen, ob es nicht eine Möglichkeit gibt die 3 Darlehensvarianten auf 1 Blick hin vergleichbar zu machen.

Nun denken Sie über die Ihnen bereits bekannte Zinsformel nach:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Mit welcher Variablen könnte man hier die Kreditkosten vergleichbar machen?

HypoVereinsbank Unicredit Group	HypoVereinsbank Unicredit Group	HypoVereinsbank Unicredit Group
Alternative 1: Fälligkeitsdarlehen	Alternative 1: Ratendarlehen	Alternative 1: Annuitätendarlehen
Darlehensbetrag: 32.000,00 € Nominalzinssatz: 5,25 % p.a. Disagio: 2 % Bearbeitungsgebühr: 0,50 % Laufzeit: 5 Jahre	Darlehensbetrag: 32.000,00 € Nominalzinssatz: 5,55 % p.a. Disagio: 1 % Bearbeitungsgebühr: 0,75 % Laufzeit: 5 Jahre	Darlehensbetrag: 32.000,00 € Nominalzinssatz: 5,30 % p.a. Disagio: 1,25 % Bearbeitungsgebühr: 0,75 % Laufzeit: 5 Jahre
Das Darlehen wird am Ende der Laufzeit komplett zurückgezahlt.	Das Darlehen wird in jährlichen Raten während der Laufzeit zurückgezahlt.	Das Darlehen wird während der Laufzeit in gleichbleibenden Raten zurückgezahlt.
Gesamtkosten:	Gesamtkosten:	Gesamtkosten: 7.452,59 €

図12 本時の課題

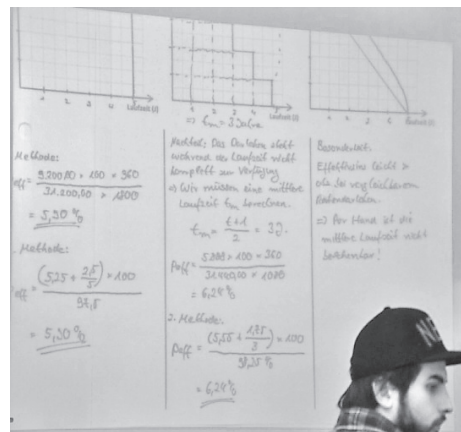


図13 課題プリントの解答

デュアルシステムでは学校と企業が協力していて、授業をサボる生徒の情報を企業に教えるなど、情報交換もしっかりされている。

授業料は無料で、遠くの生徒のために宿舎もある。州で決められたカリキュラムがあるので、それによって各学校がカリキュラムを作っている。教師のための研修講座があり、4年に1度10日間の研修義務がある。

この学校でも数学単独の授業はない。参加した授業では、銀行からの融資を受ける際の利子計算を扱っていた。このクラスでは、こういった金融関係だけでなく、イベント会場の部屋の大きさに対応した避難路面積の設計計算もするとのことである。イベントエージェントのための授業を開講している職業学校は少なく、ニュルンベルク、パッサウ、パイロイトなどから集

Aufgabe 1: Die Universal Event GmbH benötigt ein Darlehen über 500.000,00 €. Ihr liegen von drei Kreditinstituten Angebote vor.			
	Bank A	Bank B	Bank C
Nominalzinssatz in % p.a.	9	8,5	8,5
Disagio in %	2	3	4
Tilgungsvereinbarung	In gleichen Raten jährlich	Ein tilgungsfreies Jahr, danach in gleichen jährlichen Raten	Am Ende der Laufzeit (8 Jahre)
Tilgungsrate in %	12,5	20	-

1. Erstellen Sie für alle drei Angebote einen Tilgungsplan.
2. Ermitteln Sie die effektive Verzinsung für jedes Angebot.
3. Welchen Einfluss haben tilgungsfreie Jahre auf den effektiven Zinssatz?
4. Wägen Sie unter verschiedenen Gesichtspunkten ab, für welches Angebot sich die Universal Event GmbH entscheiden sollte.

図 14 練習問題

図 15 練習問題の解答

中講義を利用して受講に来ている。教科書はなく、教師がプリントを用意している。

授業内容は、イベントを実施するのに、銀行からローン3種類の提案があった。その実質年利を計算する問題である。初めは、総返却額から利子計算をする方法で求め、次には利子だけの計算を試みている。その後で、演習問題が3題出題された。工夫された授業内容で、生徒も真面目に受けている。同様な問題の簡単なものは基幹学校の卒業試験問題にも見られた。ドイツでは、同じ銀行からいくつかのローン返済計画が提案され、借り手が選択することが実際に起こる。その場面を想定して、イベントエージェントとしての学力を養成している。

VI おわりに

学校体系が複線型で、中等教育における学校が選択制であるため、複線型で扱う数学は、その生徒のレベルを考慮し、将来の進路にも合わせた内容となっている。例えば、大学進学を目指すギムナジウムでは、抽象的数学や幾何の証明をしっかりと指導する。一方、卒業後就職する基幹学校では、実際問題の解決に主眼がおかれ、幾何の論証は指導されず、複雑な図形の計量と求積が中心である。その上、各学校で卒業試験があり、卒業生の学力が一定以上であることを保証している。基幹学校や実科学校の生徒の多くは、卒業後に就職し、職業見習いとして働きながら職業学校や職業専門学校に通い、仕事に直結する数学を集中して学ぶ。

このように、学校で学ばれる数学が進路や仕事に直結していて無駄がなく、生徒に過重な負担をかけることなく効率的に数学の学習ができる環境が整えられている。これは、卒業試験制度と合わせて、生徒の学力保証に繋がっている。

単線型教育制度の日本の場合は、全生徒に一律の目標と内容を設定して、その到達度を評価しているため、進路や学力による内容の変更等が容易でない。さらに、現在は100%に近い高等学校進学率で、しかも、職業別の専門高等学校は、総合科高等学校へと改組され普通高等学校との差は少なくなった。このように、戦後の現教育制度ができた当初のように、高等学校入試で学力を測り、進路に応じた選抜をさせるといった機能は、今日、低下している。その結果は、学力保証がないままに中等教育を修了していたり、適正・能力に合った就職意識が欠如してい

たり、さらには、大学生の学力や学習意欲の低下という問題に現れたりしている。複線型の導入と、学校教育から一端離れた人に対する学習機会の提供を国家的に支援できるシステムの設置を期待する。

本論文を執筆中に、新総理直属の「教育会議」が設置され、6・3・3・4制等を見直す学制改革が議論されるというニュースがあった。是非とも、本稿で紹介してきたような複線型の目標と内容の導入、さらに卒業試験の導入を検討していただきたい。

謝辞:ドイツ文献の翻訳に際しましては、植村友紀氏（ノートルダム小学校）、有野香里氏（熊本大学院生）、Eiko出射Zechlin氏（ベルリン在住翻訳・通訳者）の協力を得ました。また、職業学校の訪問では、M. Hartmann教授（カールスルーエ教育大学）、山中信之氏（エアランゲン・ニュルンベルク大学）、K. D. Graf教授（ベルリン自由大学）にお世話になりました。お礼を申し上げます。

付記:本研究は、平成24年～平成26年文科省科学研究補助金課題番号「24531213」（代表 守屋誠司）の一部である。

参考文献

1. バイエレン州の各学校種の学習指導要領等は次のWebから閲覧できる。(2013年1月現在)
<http://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/lehrplan/mittelschule/>
2. バイエレン州の実科学校卒業試験問題は次のWebから閲覧できる。(2013年1月現在)
<http://www.realschule.bayern.de/lehrer/pruefungen/apr/m/>
3. P. Bastion, 他, “Rechenbuch Elektrotechnik”, Verlag Europa-Lehrmittel, 2001.
4. 寺田盛紀, 『新版ドイツの職業教育・キャリア教育 デュアルシステムの伝統と変容』, 大学教育出版, 2003.
5. 川口マーン恵美, 『ドイツは苦悩する』, 草思社, 2004.
6. K. Gierse, 他, “XQuadrat Mathematik 5-10I”, Oldenbourg, 2002-2005.
7. P. Bardy, D. Markert, “Mathematik für technische Berufe ALGEBRA”, Verlag Handwerk und Technik, 2009.
8. 守屋誠司・植村友紀, 「バイエルン州の基幹学校 (Hauptschule) の数学教育について—教育目標と卒業試験問題から—」, 京都教育大学『教育実践研究紀要』第11号, 2011, 31-40.
9. 守屋誠司, 「テレビ会議を利用したエリート算数・数学教員養成のための基礎研究—数学教育学のピーク制とバイエルン州の数学教員養成から—」, 玉川大学教育学部紀要『論叢』2010, 2011, 43-53.
10. 富永順一, 「教育学部における数学的基礎力向上の試みとその教員養成への寄与」, 玉川大学『教師教育リサーチセンター年報』第2号, 2012, 57-68.

Linking Middle School Mathematics Education with Vocational Education: An Introduction to Vocational Education in Germany

Seiji MORIYA

Abstract

It is necessary to examine mathematics education and to link middle school mathematics with vocational education. Therefore, I have examined the educational aims, educational content, and completion tests in mathematics at Hauptschule (vocational preparatory schools) and Realschule in the German Free State of Bavaria, which has a multi-track system of secondary education. In addition, I would like to explain mathematics education in vocational schools (Berufsschule) in the German Free State of Bavaria and the German Federal State of Baden-Wurttemberg.

Keywords : mathematics education, vocational education, Germany, Berufsschule (vocational schools), middle school education